目　　录

第 0 章　数学的预备知识

在这一章里，我们收集了分析中若干在微分方程理论中起重要作用的基本事实.

0.1. Banach 空间与例

集合的交记作 $\cap$,集合的并记作 $\cup$,集合的包含记作 $\subset$,$x\in S$ 表示 x 是集合 S 的元素. R(或 C)将用来表示实数(或复数)域. R(或 C) 上的抽象线性向量空间(或线性空间)$\mathscr{X}$ 是这样的元素集合 $\{x, y, \cdots\}$, 对于 $\mathscr{X}$ 中的任何 x, y, 它们的和 $x+y$ 有定义, $x+y\in\mathscr{X}$, $x+y=y+x$, 又 $\mathscr{X}$ 中有元素 0, 使得对于所有 $x\in\mathscr{X}$, 有 $x+0=x$; 对于任何数 $a, b\in R$(或 C), 纯量乘积 ax 有定义, $ax\in\mathscr{X}$, $1\cdot x=x$, $(ab)x=a(bx)=b(ax)$, $(a+b)x=ax+bx$, $a(x+y)=ax+ay$. 如果对于线性空间 $\mathscr{X}$ 的每个 x, 对应着一个实数 $|x|$, 称为 x 的范数, 它满足下述条件

(i) 当 $x\neq 0$ 时 $|x|>0$, $|0|=0$;

(ii) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$(三角不等式);

(iii) 对于所有 R(或 C) 中的 a 与 $\mathscr{X}$ 中的 x, 有 $|ax|=|a|\cdot|x|$.

这种线性空间 $\mathscr{X}$ 就是赋范线性空间. 在可能混淆时, 在 $|\cdot|$ 下角加表示 $\mathscr{X}$ 的记号. 赋范线性空间 $\mathscr{X}$ 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛到 $\mathscr{X}$ 中的 x, 指的是 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x|=0$. 我们把它写作 $\lim x_n=x$. $\mathscr{X}$ 中的序列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列, 如果对于任何 $\varepsilon>0$, 存在 $N(\varepsilon)>0$, 使得若 $n, m\geqslant N(\varepsilon)$, 则 $|x_n-x_m|<\varepsilon$. 如果 $\mathscr{X}$ 中的每个 Cauchy 序列收敛到 $\mathscr{X}$ 的一个元素, 空间 $\mathscr{X}$ 是完全的. 完全的赋范线性空间是 Banach 空间. 赋范线性空间 $\mathscr{X}$ 的元素 x 的 ε-邻域是 $\{y\in\mathscr{X}:$

$|y-x|<\varepsilon\}$. 如果$\mathscr{X}$中的集合S的任何x都有包含在S内的ε-邻域, S就是开集. 如果元素x的每个ε-邻域都包含集合S的点, x是S的极限点. 如果集合S包含它所有的极限点, S是闭集. 集合S的闭包是S与全体极限点的并集. 如果S的闭包是$\mathscr{X}$, 则集合S在$\mathscr{X}$中稠密. 如果S是$\mathscr{X}$的子集, A是R的子集, 而$\alpha\in A$, V_α是$\mathscr{X}$的开集的集合, 使得$\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha\supset S$, 则集合$V_\alpha$被称作$S$的开复盖. 如果$\mathscr{X}$中的集合$S$的每个开复盖包含有限个仍然复盖住$S$的开集, 则$S$是紧的. 对于 Banach 空间, 它与下述说法等价: 如果 Banach 空间的集合S的任何序列$\{x_n\}$总包含收敛到S的元素的子序列, 则S是紧的. 如果对于$\mathscr{X}$中的集合S, 存在$r>0$, 使得$S\subset\{x\in\mathscr{X}: |x|<r\}$, 则$S$是有界的.

例 1.1. 设$R^n(C^n)$是实(复)n-维向量空间. 对于特定的坐标系, $R^n(C^n)$的元素x便写作$x=(x_1, \cdots, x_n)$, 此地每个x_j属于$R(C)$. 如果$x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots, y_n)$属于$R^n(C^n)$, 那么对于$R(C)$中的a, b, $ax+by$被定义为$(ax_1+by_1, \cdots, ax_n+by_n)$. $R^n(C^n)$显然是线性空间. 如果对于$x=(x_1,\cdots,x_n)$取$|x|$为$\sup_i|x_i|$, $\sum_i|x_i|$或$[\sum_i|x_i|^2]^{\frac{1}{2}}$, 则$R^n(C^n)$是 Banach 空间. 这些范数在这样的意义下是等价的, 按一种范数收敛的序列也按其它种范数收敛. 由于收敛性意味着坐标的收敛性, 而$R(C)$又是完全的, 因此$R^n(C^n)$是完全的.

$R^n(C^n)$中的集合S是紧的, 当且仅当它是闭的与有界的.

习题 1.1. 如果E是有限维线性向量空间, 而$|\cdot|$, $\|\cdot\|$是E的两种范数, 证明存在正的常数m, M使得对于E中所有x, $m|x|\leqslant\|x\|\leqslant M|x|$.

例 1.2. 设D是R^m[或C^m]的紧子集, 而$\mathscr{C}(D,R^n)$[或$\mathscr{C}(D,

C^n)]是由把D映入R^n[或C^n]的连续函数所成的线性空间. $\mathscr{C}(D, R^n)$中的函数序列$\{\phi_n, n=1, 2, \cdots\}$称为在$D$上一致收敛的, 如果存在把$D$映入$R^n$的函数$\phi$, 使得对于每个$\varepsilon>0$存在$N(\varepsilon)$(不依赖于$n$), 使得对于所有$n\geqslant N(\varepsilon)$与$D$中的$x$都有$|\phi_n(x)-\phi(x)|<\varepsilon$. 序列$\{\phi_n\}$称为一致有界的, 如果存在$M>0$使得对于所有$D$中的$x$与所有$n=1, 2, \cdots$都有$|\phi_n(x)|<M$. 序列$\{\phi_n\}$称为同等连续的, 如果对于每个$\varepsilon>0$存在$\delta>0$使得只要$D$中的$x$, y满足$|x-y|<\delta$, 就有

$$|\phi_n(x)-\phi_n(y)|<\varepsilon,\quad n=1, 2, \cdots,$$

$\mathscr{C}(D, R^n)$中的函数f称为满足 Lipschitz 条件的, 如果存在常数K使得对于D中所有x, y有$|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|$. 最常碰见的$\mathscr{C}(D, R^n)$中的同等连续序列是满足 Lipschitz 条件且 Lipschitz 常数K不依赖于n的序列$\{\phi_n\}$.

引理 1.1. (Ascoli-Arzela) $\mathscr{C}(D, R^n)$的任何一致有界、同等连续的函数序列有在D上一致收敛的子序列.

引理 1.2. 如果$\mathscr{C}(D, R^n)$中的序列在D上一致收敛, 则极限函数属于$\mathscr{C}(D, R^n)$.

如果我们定义

$$|\phi|=\max_{x\in D}|\phi(x)|,$$

则易知它是$\mathscr{C}$上的一种范数, 而上述引理说明$\mathscr{C}(D, R^n)$是具有这种范数的 Banach 空间. 对于$\mathscr{C}(D, C^n)$也同样.

习题 1.2. 假设$m=n=1$. 若定义

$$\|\phi\|=\int_D|\phi(x)|dx,$$

试说明$\mathscr{C}(D, R)$是赋范线性空间. 给出例子说明为什么这个空间不完全, 什么是这个空间的完全化?

0.2. 线性变换

把某空间的集合 A 变入某空间的集合 B 的函数称为由 A 入 B 的变换或映射. A 叫做映射的区域, 映射值的集合叫做映射的值域. 如果 f 是由 A 入 B 的映射, 我们简记之为 $f:A\to B$, 又记 f 的值域为 $f(A)$. 如果 $f:A\to B$ 是一对一的, 并且与其逆都是连续的, 则 f 为由 A 到 B 的同胚. 如果 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是实(或复)Banach 空间, 而 $f:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$. 对于所有 $\mathscr{X}$ 中的 x_1, x_2 与所有实(或复)数 a_1, a_2 有 $f(a_1x_1+a_2x_2)=a_1f(x_1)+a_2f(x_2)$, 则 f 称为线性映射. 由 $\mathscr{X}$ 入 $\mathscr{Y}$ 的线性映射称为有界的, 如果存在常数 K 使得 $|f(x)|_2\leqslant K|x|_1$ 对所有 $\mathscr{X}$ 中的 x 成立, 这里 1, 2 分别表示范数是在 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 中取的.

引理 2.1. 假设 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, 线性映射 $f:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 有界, 当且仅当它是连续的.

习题 2.1. 证明此引理.

习题 2.2. 证明由 R^n(或 C^n)入 R^m(或 C^m)的每个线性映射可以用 $m\times n$ 实(或复)矩阵表示, 因此必然连续.

连续线性映射 $f:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 的范数 $|f|$ 定义为

$$|f|=\sup\{|f(x)|_2: |x|_1=1\}.$$

容易证明这样定义的 $|f|$ 具备范数定义中的性质(i)—(iii), 并且

$$|f(x)|_2\leqslant|f|\cdot|x|_1 \qquad \text{对于一切 } \mathscr{X} \text{ 中的 } x.$$

如果把 n 维线性空间映入 m 维线性空间的线性映射是由 $m\times n$ 矩阵 A 确定的, 我们把它的范数记作 $|A|$.

习题 2.3. 假设 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, 且 $L(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是由 $\mathscr{X}$ 入 $\mathscr{Y}$ 的有界线性算子的集合. 证明 $L(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是具有上面定义的范数的 Banach 空间.

例 2.1. 定义 $f:\mathscr{C}([0,1],R)\to R$ 为 $f(\phi)=\int_0^1\phi(s)ds$, f 是线性、连续映射, $|f|=1$.

例 2.2. 定义 $S=\{\mathscr{C}([0,1], R)$ 中有连续的一阶微商的 $\phi\}$. S 在 $\mathscr{C}([0,1],R)$ 中稠密. 对于任何 S 中的 ϕ, 定义 $f\phi(t)=d\phi(t)/dt, 0\leqslant t\leqslant 1$. 函数 f 是线性的,但是无界. 事实上,函数序列 $\phi_n(t)=t^n$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 满足 $\|\phi_n\|=1$, 但是 $\|f\phi_n\|=n$. 说明无界性的另一方法是证明 f 不连续. 考虑函数 $\phi_n(t)=t^n-t^{n+1}, 0\leqslant t\leqslant 1$, $n\geqslant 1$. 在 $\mathscr{C}([0, 1], R)$ 中, $n\to\infty$ 时 $\phi_n\to 0$, 但是 $f\phi_n(t)=t^{n-1}[n-(n+1)t]$ 且 $f\phi_n(1)=-1$, 当 $n\to\infty$ 时不趋于 0.

在微分方程中经常用到的另一个非常重要的泛函分析工具是一致有界性原理. 在本书中, 我们用比较初等的证明来回避用这个原理,只在第 IV 章中有一个例外.

一致有界性原理.

假设 $\mathscr{A}$ 是指标集合, 而对 $\mathscr{A}$ 中的 α, T_α 是由 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 到 Banach 空间 $\mathscr{Y}$ 的有界线性映射, 并且对 $\mathscr{X}$ 中的每个 x, $\sup\limits_{\alpha\in\mathscr{A}}|T_\alpha x|<\infty$, 则 $\sup\limits_{\alpha\in\mathscr{A}}|T_\alpha|<\infty$.

0.3. 不动点定理

变换 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 的不动点是 $\mathscr{X}$ 中满足 $Tx=x$ 的点 x. 关于变换不动点存在性的定理在微分方程中用起来很方便, 即使并非绝对必要. 这些定理可以当作一种工具,以避免重复议论,使人能注意问题的实质.

分析中的一种标准方法是逐次逼近法, 它的基本原理已被抽象为所谓 Banach 与 Cacciopoli 压缩映射原理. 如果 $\mathscr{F}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 的子集. 而 T 是由 $\mathscr{F}$ 映入 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 的变换(记作 $T:\mathscr{F}\to\mathscr{B}$), 则 T 是 $\mathscr{F}$ 上的压缩, 如果存在 $\lambda, 0\leqslant\lambda<1$, 使得

$$|Tx-Ty|\leqslant\lambda|x-y|,\quad x,y\in\mathscr{F}.$$

常数 λ 称为 T 在 $\mathscr{F}$ 上的压缩常数.

定理 3.1. (Banach-Cacciopoli 压缩映射原理). 如果$\mathscr{F}$是 Banach 空间$\mathscr{X}$的闭子集，而$T:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$是压缩，则$T$在$\mathscr{F}$中有唯一不动点$\bar{x}$. 并且如果在$\mathscr{F}$中任取$x_0$，序列$\{x_{n+1}=Tx_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$当$n\to\infty$时总收敛于$\bar{x}$，并且$|\bar{x}-x_n|\leqslant\lambda^n|x_1-x_0|/(1-\lambda)$，此地$\lambda<1$是$T$在$\mathscr{F}$上的压缩常数.

证明 唯一性. 如果$0\leqslant\lambda<1$是T在$\mathscr{F}$上的压缩常数，又有$x,y\in\mathscr{F}$满足$x=Tx$，$y=Ty$，于是$|x-y|=|Tx-Ty|\leqslant\lambda|x-y|$. 由此推知$|x-y|\leqslant 0$，故$|x-y|=0$即$x=y$.

存在性. 设x_0是任意的，而$x_{n+1}=Tx_n$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，根据假设每个x_n，$n=0,1,\cdots$，属于$\mathscr{F}$. 又$|x_{n+1}-x_n|\leqslant\lambda|x_n-x_{n-1}|\leqslant\cdots\leqslant\lambda^n|x_1-x_0|$，$n=0,1,\cdots$于是对于$m>n$

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant[\lambda^{m-1}+\lambda^{m-2}+\cdots+\lambda^n]|x_1-x_0|\\&=\lambda^n[1+\lambda+\cdots+\lambda^{m-n-1}]|x_1-x_0|\\&=\frac{\lambda^n[1-\lambda^{m-n}]}{1-\lambda}|x_1-x_0|\leqslant\frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1-x_0|,\end{aligned}$$

故$\{x_n\}$是 Cauchy 序列，在$\mathscr{X}$中有$\bar{x}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\bar{x}$. 因为$\mathscr{F}$是闭的，故$\bar{x}$属于$\mathscr{F}$. 因为$T$连续，又$|\cdot|$连续(因为$|x|-|x_n-x|\leqslant|x_n|\leqslant|x_n-x|+|x|$)，所以推知

$$0=\lim_{m\to\infty}|x_{m+1}-Tx_m|=|\lim_{m\to\infty}[x_{m+1}-Tx_m]|=|\bar{x}-T\bar{x}|,$$

故$T\bar{x}=\bar{x}$. 这就证明了不动点的存在性.

在前面对$|x_m-x_n|$的估计式中令$m\to\infty$，便证明了最后的估计式，定理证毕.

习题 3.1. 假设$\mathscr{X}$是 Banach 空间，$T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$是连续线性算子，$|T|<1$. 证明：若$I$为恒等算子，则$I-T$有有界的逆. 即证明方程$(I-T)x=y$在$\mathscr{X}$中有唯一解$x$，它连续依赖于$\mathscr{X}$中的$y$.

设 $\mathscr{X}$、$\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间，D 是$\mathscr{X}$中的开集．函数 $f:D\to\mathscr{Y}$ 称为在 D 中点 x(Frechet)可微，如果存在 $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 的有界线性算子 $A(x)$，使得对于每个 $h\in\mathscr{X}$，只要 $x+h\in D$ 就有

$$|f(x+h)-f(x)-A(x)h|\leqslant\rho(|h|,x),$$

此地 $\rho(|h|,x)$满足当$|h|\to0$ 时 $\rho(|h|,x)/|h|\to0$．线性算子 $A(x)$称为 f 在 x 的导数，而 $A(x)h$ 称为 f 在 x 的微分．

习题 3.2．假设 $\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$是 Banach 空间，$\mathscr{A}$是$\mathscr{X}$的开子集，$f:\mathscr{A}\to\mathscr{Y}$，而对于每个 $x_0\in\mathscr{A}$，$h\in\mathscr{X}$ 以及实变量 t，极限

$$\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=\omega(x_0)h$$

存在．再假设对于所有 $x_0\in\mathscr{A}$ 而言，$\omega(x_0)$是连续线性映射，又假设 ω 作为由$\mathscr{A}$入$L(\mathscr{X},\mathscr{Y})$的映射是连续的，其中 $L(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是习题 2.3 中所定义的．证明，$f$ 是(Frechet)可微的，在 $x_0\in\mathscr{A}$ 的导数是 $\omega(x_0)$．

习题3.3．证明上一习题中的 $\omega(x_0)$可能对于每个 h 都存在，是连续线性映射，但可能不是 f 在 $x_0\in\mathscr{A}$的 Frechet 导数．

习题 3.4．设 $\mathscr{C}^1([0,1],R^n)$是连续可微函数 x：$[0,1]\to R^n$ 的空间，在其中按通常的方式定义了加法与纯量乘法，又令$|x|=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant1}|x(t)|+\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant1}|\dot{x}(t)|$，此地 $\dot{x}(t)=dx/dt$．证明$\mathscr{C}'([0,1],R^n)$是 Banach 空间．

习题 3.5．设 $w:\mathscr{C}^1([0,1],R^n)\times[0,1]\to R^n$ 是赋值映射，$w(x,t)=x(t)$．证明 w 连续可微，并计算其导数．用两法作此题，一法是按导数的定义，一法是据习题 3.2.

若f：$R^m\to R^n$在点 x 可微，则$A(x)=\partial f(x)/\partial x=(\partial f_i(x)/\partial x_j$，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m)$是 f 对于 x 的 Jacobi 矩阵．

引进一些关于阶关系的记号，以后有用．如果$|f(x)|/|x|$对零的邻域内的 x 有界，就说当$|x|\to0$ 时 $f(x)=O(|x|)$．如果

$|x|\to 0$ 时 $|f(x)|/|x|\to 0$，就说当 $|x|\to 0$ 时 $f(x)=o(|x|)$。

假设$\mathscr{F}$是 Banach 空间$\mathscr{X}$的子集，$\mathscr{G}$ 是 Banach 空间$\mathscr{Y}$的子集，而$\{T_y,\ y\in\mathscr{G}\}$是 $\mathscr{F}\to\mathscr{X}$的算子族．如果$T_y$：$\mathscr{F}\to\mathscr{F}$，且有 λ，$0\leqslant\lambda<1$．使得

$$|T_yx-T_y\bar{x}|\leqslant\lambda|x-\bar{x}| \qquad \text{对于所有 } y\in\mathscr{G} \text{ 与 } x,\bar{x}\in\mathscr{F}.$$

则说算子 T_y 是在$\mathscr{F}$上的一致压缩．换句话说，对于每个$\mathscr{G}$中的 y 而言，T_y 是压缩，而压缩常数又可取得不依赖于 y。

定理 3.2. 如果$\mathscr{F}$是 Banach 空间$\mathscr{X}$的闭子集，$\mathscr{G}$是 Banach 空间$\mathscr{Y}$的子集；对于$\mathscr{Y}$中的 y，T_y：$\mathscr{F}\to\mathscr{F}$是$\mathscr{F}$上的一致压缩；对于$\mathscr{F}$中每一个固定的 x，T_yx 对 y 是连续的，则 T_y 的唯一不动点 $g(y)$对 y 是连续的．并且，如果 $\mathscr{F}$，$\mathscr{G}$是开集 $\mathscr{F}^\circ$，$\mathscr{G}^\circ$ 的闭包；而 T_yx 对 y，x 的一阶导数相应地为 $A(x,y)$，$B(x,y)$，并且都连续；则 $g(y)$对于 $\mathscr{G}^\circ$ 中的 y 的一阶导数连续。

推论 3.1. 假设$\mathscr{X}$是 Banach 空间，$\mathscr{G}$ 是 Banach 空间$\mathscr{Y}$的子集；A_y：$\mathscr{X}\to\mathscr{X}$对于$\mathscr{Y}$中每个 y 是连续线性算子；对于所有 $y\in\mathscr{G}$，$|A_y|\leqslant\delta<1$；对于$\mathscr{X}$中每个 x 而言，A_yx 对 y 连续．则算子 $I-A_y$ 有有界的逆，此逆连续地依赖于 y。

证明 因为T_y:$\mathscr{F}\to\mathscr{F}$是一致压缩，所以存在 λ，$0\leqslant\lambda<1$，使得对于$\mathscr{G}$中所有 y 与$\mathscr{F}$中所有 x，$\bar{x}$ 有$|T_yx-T_y\bar{x}|\leqslant\lambda|x-\bar{x}|$．设 $g(y)$ 是 T_y 在$\mathscr{F}$中的唯一不动点，据定理 3.1 知它是存在的．于是

$$\begin{aligned}g(y+h)-g(y)&=T_{y+h}g(y+h)-T_yg(y)\\&=T_{y+h}g(y+h)-T_{y+h}g(y)+T_{y+h}g(y)\\&\quad-T_yg(y),\end{aligned}$$

而

$$|g(y+h)-g(y)|\leqslant\lambda|g(y+h)-g(y)|+|T_{y+h}g(y)-T_yg(y)|,$$

由此推知

$$|g(y+h)-g(y)|\leqslant(1-\lambda)^{-1}|T_{y+h}g(y)-T_yg(y)|.$$

由于 $T_y x$ 对于$\mathscr{F}$中每个固定的 x 而言，对 y 是连续的，故 $g(y)$是连续的．这就证明了定理的第一部分．

从此可几乎直接地证明推论 3.1. 事实上，我们需要证明的是，对于$\mathscr{X}$中每个 z，方程 $x-A_y x=z$ 有唯一解，而此解连续地依赖于 y，z．这等价于求由 $T_{y,z}x=A_y x+z$ 所定义的算子 $T_{y,z}$ 的不动点 x．由于算子 A_y 是一致压缩，从定理 3.2. 的第一部分便推出推论 3.1 的结论．

为了证明定理的后一部分，我们假设对于 $y\in\mathscr{G}^\circ$，$x\in\mathscr{F}^\circ$，$T_y x$ 有连续的一阶导数，它们相应地是 $A(x, y)$，$B(x, y)$．$g(y)=T_y g(y)$．我们先假定 g 有导数 $C(y)$，对于$\mathscr{Y}$中 h，来找 g 的微分 $z=C(y)h$ 应满足的方程．如果微分的链式法则可用，则

$$z=B(g(y),y)z+A(g(y),y)h, \tag{3.1}$$

此地 h 是$\mathscr{Y}$的任意元素．容易证明，由 T_y 是一致压缩，可推知对于 $\mathscr{F}^\circ$ 中的 x 与 $\mathscr{G}^\circ$ 中的 y 有 $|B(x,y)|<\delta<1$．

由于对于 $\mathscr{F}^\circ$ 中的 x 与 $\mathscr{G}^\circ$ 中的 y 有 $|B(x,y)|<\delta<1$，从推论 3.1 推知对于 $\mathscr{G}$ 中每个 y 与 $\mathscr{Y}$ 中 h，方程 (3.1) 有唯一解 $z(y,h)$，它对 y,h 是连续的．根据唯一性，可见对于所有纯量 α,β 与$\mathscr{Y}$中 h,u 有 $z(y,\alpha h+\beta u)=\alpha z(y,h)+\beta z(y,u)$；即 $z(y,h)$ 对 h 是线性的，可以写成 $C(y)h$，此地 $C(y)$：$\mathscr{Y}\to\mathscr{X}$对每个 y 是连续线性算子，并且对 y 是连续的．为了证明 $C(y)$ 是 $g(y)$ 的导数，我们对充分小的 h 来考察

$$\begin{aligned} g(y+h)-g(y)&=T_{y+h}g(y+h)-T_y g(y)\\ &=T_y g(y+h)-T_y g(y)+A(g(y+h),y)h\\ &\quad +o(|h|)\\ &=B(g(y),y)[g(y+h)-g(y)]+o(|g(y+h)\\ &\quad -g(y)|)+A(g(y+h),y)h+o(|h|), \end{aligned} \tag{3.2}$$

如果$g(y+h)-g(y)-C(y)h=w$，那么由关系式(3.2)与$z=C(y)h$

满足(3.1)的事实推知有对 h,y 连续的并且当 $h\to 0$ 时趋于零的函数 $k(h,y)$ 适合

$$[I-B(g(y),y)+k(h,y)]w=[A(g(y+h),y)-A(g(y),y)]h$$
$$+k(h,y)C(y)h+o(|h|),$$

由于 $A(x,y)$ 与 $g(y)$ 都连续，此式右边当 $|h|\to 0$ 时是 $o(|h|)$. 此外，存在 $h_0>0$, 对于 $|h|\leqslant h_0$ 有 $|B(g(y),\ y)-k(h,\ y)|<\delta/2$, 于是由推论 3.1 推知线性算子 $I-B(g(y),y)+k(h,y)$ 有有界的逆，并且此逆对 y,h 连续. 于是当 $|h|\to 0$ 时 $|w|=o(|h|)$. 定理证毕.

为了说明压缩映射原理，我们来证明下述关于隐函数的重要定理. 在叙述中 $\det A$ 表示 $m\times m$ 矩阵 A 的行列式.

定理 3.3. (隐函数). 假设 $F:R^m\times R^n\to R^m$ 有连续的一阶偏导数，$F(0,0)=0$. 如果 F 对于 x 的 Jacobi 矩阵 $\partial F(x,y)/\partial x$ 满足 $\det\partial F(0,0)/\partial x\neq 0$, 则在 R^m,R^n 中存在 0 的邻域 U, V, 使得对于 V 中每个固定的 y, 方程 $F(x,y)=0$ 在 U 中有唯一解 x, 并且此解可以表成 $x=g(y)$, 此地 g 有连续的一阶导数，且 $g(0)=0$.

证明 记

$$F(x,y)=Ax-N(x,y),$$

$$A=\frac{\partial F(0,0)}{\partial x},$$

$$N(x,y)=\frac{\partial F(0,0)}{\partial x}x-F(x,y),\quad N(0,0)=0.$$

从 N 的表示式得

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial F(0,0)}{\partial x}-\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}.$$

由于假设 $\partial F(x,y)/\partial x$ 连续，故 $x\to 0,y\to 0$ 时 $\partial N(x,y)/\partial x\to 0$. 于是存在 $y\in R^n$, $\rho\geqslant 0$ 处的连续函数 $k(y,\rho)$, 使得 $k(0,0)=0$, 并且

$$|N(x,y)-N(\bar{x},y)|\leqslant k(y,\rho)|x-\bar{x}|$$

对所有 R^n 中的 y 与满足 $|x|$, $|\bar{x}|\leqslant\rho$ 的 $x,\bar{x}$ 成立. 由于假设矩阵

A 满秩，求 $F(x,y)=0$ 的解等价于求方程 $x=A^{-1}N(x,y)$ 的解，此地 A^{-1} 是 A 的逆．而这又等价于求由 $T_y x=A^{-1}N(x,y)$ 所定义的算子 $T_y: R^m\to R^n$ 的不动点．现在我们证明 T_y 在相应的集合上是压缩．存在常数 K(参见习题 2.2) 使得对于 R^m 中所有 x 有 $|A^{-1}x|\leqslant K|x|$，因此

$$\begin{aligned}|T_y x| &= |A^{-1}N(x,y)|\leqslant K|N(x,y)|\\ &=K|N(x,y)-N(0,y)+N(0,y)|\\ &\leqslant Kk(y,\rho)|x|+K|N(0,y)|,\end{aligned}$$

$$|T_y x-T_y\bar{x}|\leqslant Kk(y,\rho)|x-\bar{x}|$$

对于 $|x|$, $|\bar{x}|\leqslant\rho$ 与所有 y 成立．取甚小的正数 ε,δ，以致

$$Kk(y,\rho)\rho+K|N(0,y)|<\varepsilon \quad 对 |y|\leqslant\delta,\ \rho\leqslant\varepsilon 成立,$$

$$\sup\{Kk(y,\rho),\ |y|\leqslant\delta,\ \rho\leqslant\varepsilon\}<1,$$

又令 $U=\{R^m$ 中的 $x: |x|<\varepsilon\}$，$V=\{R^n$ 中的 $y: |y|<\delta\}$．由上可见 T_y 对于 V 中 y 而言是 U 的一致压缩．根据定理 3.1，T_y 在 U 内有唯一不动点 $g(y)$．显然 $g(0)=0$．由于 $T_y x$ 对于每个 x 而言对 y 是连续的，从定理 3.2 推知 $g(y)$ 是 y 的连续函数．$T_y x$ 对 x 与 y 的一阶导数是连续的，并且对 x 的导数是 $A^{-1}\partial N(x,y)/\partial x$．于是由定理 3.2 推知 $g(y)$ 对 y 的连续可微性，这就完成了隐函数定理的证明．

习题 3.6．叙述与证明定理 3.3 对于 Banach 空间的推广．提示：作适合于 Banach 空间的必要的相应的改变与假定，然后再重复定理 3.3 的证明步骤．

压缩映射原理是一种不动点定理．在微分方程理论中，比较复杂的不动点定理也很有用，我们再叙述在本书中用到的两个．

在一维情况下，下述不动点定理是显然成立的：任何从闭区间[0, 1]映入它自身的连续映射必然有不动点．只要我们注意到不动点的存在性等价于在二维空间中函数的图形必与顶点在

$(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$的单位正方形的对角线相交，证明便显明了．再思考一下便想到相似的结果在高维情况成立，但其证明较难．这便是

Brouwer 不动点定理． R^n中的闭单位球映入自身的任何连续映射必然有一个不动点．

如果R^n的子集A与R^n中的闭单位球同胚，而f是由A入A的连续映射，则由 Brouwer 不动点定理推知f在A内有一个不动点．

假设$f:R^n\to R^n$是连续映射，函数f的零点就是由$g(x)=x+f(x)$所定义的映射g的不动点．如果我们能够证明在R^n中存在着集合D，它与R^n中闭单位球同胚，而g把D映入D，那么由 Brouwer 不动点定理推知g在D内有一个不动点，又f在D内有一个零点．这是 Brouwer 不动点定理的一个很重要的应用．

Brouwer 不动点定理已被 Schauder 推广到 Banach 空间，又被 Tychonov 推广到更一般的空间，我们来叙述 Banach 空间中的结果．以前说过，如果 Banach 空间的子集$\mathscr{A}$的任何序列$\{\phi_n\}$，$n=1,2,\cdots$总有收敛于$\mathscr{A}$的某元素的子序列，$\mathscr{A}$便是紧的．如果对子子集$\mathscr{A}$中的x,y，当$0\leqslant t\leqslant 1$时$tx+(1-t)y$总在$\mathscr{A}$内，$\mathscr{A}$便是凸的；即凸集包含连接x与y的"线段"．由 Banach 空间$\mathscr{X}$入 Banach 空间$\mathscr{Y}$的映射f称为紧的，如果对于$\mathscr{X}$的每个有界集合$\mathscr{A}$而言，集合$\{f(x),x$在$\mathscr{A}$中$\}$的闭包是紧的．如果此外f是连续的，则称为完全连续的．

Schauder 不动点定理． 如果$\mathscr{A}$是 Banach 空间$\mathscr{X}$的凸、紧子集，而$f:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$是连续的，则$f$在$\mathscr{A}$内有一个不动点．

推论． 如果$\mathscr{A}$是 Banach 空间$\mathscr{X}$的闭、有界、凸子集，而$f:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$完全连续，则$f$在$\mathscr{A}$内有一个不动点．

推论的证明如下：因为$f(\mathscr{A})\subset\mathscr{A}$，又$\mathscr{A}$是闭的，所以根据假

定知 $f(\mathscr{A})$ 的闭包属于 $\mathscr{A}$，又是紧的．并且由于 $\mathscr{A}$ 是凸的，故 $f(\mathscr{A})$ 的凸闭包 $\mathscr{B}$[包含 $f(\mathscr{A})$ 的最小闭凸集]属于 $\mathscr{A}$．据 Mazur 的一条定理知 $\mathscr{B}$ 是紧的．由于 $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$，故 $f(\mathscr{B})\subset f(\mathscr{A})\subset\mathscr{B}$，而从前面的结果推知在 $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$ 内有一个不动点。

如同前面提到的，Tychonov 把 Schauder 定理引伸到更一般的空间(局部凸线性拓扑空间)．我们不打算介绍局部凸线性拓扑空间的所有术语．事实上，我们需要这个定理的引伸形式成立的仅有的一种空间是连续函数 $f:R\to C^n$ 的空间，在其中收敛性等价于在紧子集上的一致收敛性．在这个空间中，如果某集合的元素都是一致有界的连续函数，这个集合便是有界的．于是定理的引伸形式的叙述与前面形式恰好相同，我们将称这种情况下的不动点定理为 Schauder-Tychonov 定理。

习题 3.7．说明如果去掉 $\mathscr{A}$ 的紧性或凸性，Schauder 定理便不对了．

设 I 是 R^1 的闭有界区间，可以按下述方式得到 $\mathscr{C}(I, R^n)$ 的一个很有用的紧、凸子集．假设 M、β 是正的常数，而 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}(I,R^n)$ 的这样的子集，$\mathscr{A}$ 中的 ϕ 满足 $|\phi|\leqslant\beta$，又对于 I 中的 t、$\bar{t}$ 有 $|\phi(t)-\phi(\bar{t})|\leqslant M|t-\bar{t}|$．集合 $\mathscr{A}$ 显然是凸与闭的．并且 $\mathscr{A}$ 中任何序列 $\{\phi_n\}$ 是一致有界与同等连续的．由引理 1.1 与 1.2 推知在 $\mathscr{C}(I, R^n)$ 存在 ϕ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n=\phi$．但是 $\mathscr{A}$ 是闭的，所以 ϕ 属于 $\mathscr{A}$．这就证明了 $\mathscr{A}$ 的紧性．

下列各书是分析与泛函分析的标准参考书．

Dunford, N. 与 J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience, New York, 1964.

Graves, L. M., *The Theory of Functions of Real Variables*, 2nd Edition, McGraw-Hill, New York, 1956.

Hurewicz, W., 与 H. Walman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.

Liusternik, L. A., 与 V. J. Sobolev, *Elements of Functional Analysis*, Ungar, New York, 1965. (有中译本)

Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.

Yoshida, K., *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

第Ⅰ章　微分方程的一般性质

本章讨论微分方程的不依赖于向量场特定形状的性质. 第1节的存在性定理说明微分方程确定一族函数,而第2、3节就讨论此函数族对于初始值与参数的依赖关系. 在第4节中,对照着对于初始值的连续依赖性概念来介绍稳定性概念. 第5节论及其向量场对 t 仅是 Lebesgue 可积的微分方程. 第6节专述微分不等式及其在求微分方程的解的上下界问题中的应用. 第7、8节说明其向量场不依赖于时间的微分方程的解的某些性质: 在正则点附近轨道柱的存在性,不变集与极小集的概念.

Ⅰ.1. 存在性

设 t 是实的纯量; 又设 D 是 R^{n+1} 的开集, 其元素记作 (t,x); 设 f: $D\to R^n$ 连续, 又 $\dot{x}=dx/dt$. 微分方程乃是形如

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t))\text{或简记为 }\dot{x}=f(t,x) \tag{1.1}$$

的关系式. 设区间 $I\subset R$, 如果 x 是在 I 上有定义的连续可微函数, $t\in I$ 时 $(t,x(t))\in D$, 又 x 在 I 上满足 (1.1), 我们就说 x 是 (1.1) 在 I 上的一个解. 又把 f 叫作 D 上的向量场.

例1.1. 设 $D=R^2$, $f(t,x)=x^2$. c 是任意实数且 $c\neq 0$. 函数 $\phi(t)=-\dfrac{1}{t+c}$ 是 $\dot{x}=x^2$ 的解, 当 $c>0$ 时 $t\in(-c,\infty)$; 当 $c<0$ 时 $t\in(-\infty,-c)$. (见图1.1).

例1.2. 设 $D=R^2$, $x\geqslant 0$ 时 $f(t,x)=\sqrt{x}$, $x<0$ 时 $f(t,x)=0$. 函数 $\phi(t)=(t-c)^2/4$ 当 $t\geqslant c$ 时是 $\dot{x}=\sqrt{x}$, $x\geqslant 0$ 的解. 注意 $x=0$ 也是解. (见图1.2).

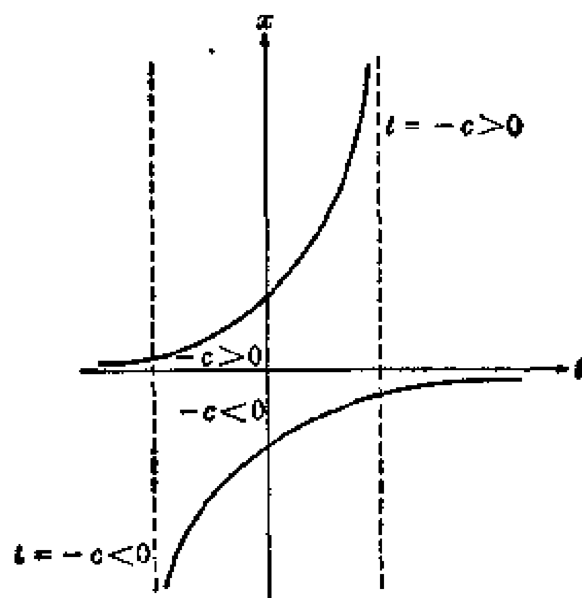


图 I.1.1

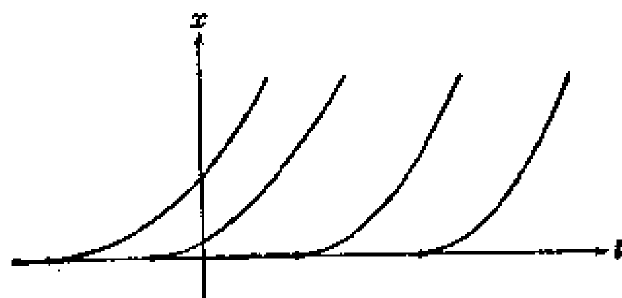


图 I.1.2

假设给定了 $(t_0, x_0) \in D$. 方程 (1.1)的初值问题是找一个包含 t_0的区间 I 与(1.1)的满足 $x(t_0)=x_0$的解 x. 我们记此问题为

$$\dot{x}=f(t,x), x(t_0)=x_0, t\in I. \tag{1.2}$$

如果存在一个包含 t_0的区间 I 与满足 (1.2) 的 x, 我们把 x 叫作(1.1)的通过(t_0, x_0)的解.

对于初值问题, $\dot{x}=x^2, x(0)=-c$, c 为实数, 例 1.1 表明区间 I 可能依赖于 c, 而不一定是整条实直线.

初值问题 $\dot{x}=\sqrt{x}$, $x\geqslant 0, x(0)=0$, 在$(-\infty, \infty)$上有解 $x=0$. 函数

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{(t-c)^2}{4}, & t\geqslant c\geqslant 0,\\ 0, & t\leqslant c.\end{cases}$$

也是解. 因此即使对于连续的 f 而言, (1.2)也未必只有一个解.

本章的首要目的是讨论存在性、唯一性、解的延拓与解对于初始数据和参数的连续依赖性.

首先请注意, 由于考虑的是向量方程, 因而不必考虑 n 阶方程. 事实上, 若 y 是纯量, 用 $y^{(j)}$记 d^jy/dt^j 而

$$y^{(n)}=F(t,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),$$

$$y^{(j)}(t_0)=x_{j+1,0},\ j=0,1,\cdots,n-1,$$

于是在令 $x=(y,y^{(1)},\cdots,y^{(n-1)})$, $f=(x_2,x_3,\cdots,x_n,F)$以后, 得到等价问题

$$\dot{x}=f(t,x),\ \ x(t_0)=x_0=(x_{10},\cdots,x_{n0}).$$

此外, 在讨论(1.1)时也包括了实变量 t 的复值微分方程, 因为通过取实部与虚部, 可得一实的系统.

引理 1.1. 如果 $f(t,x)$连续, 问题(1.2)等价于

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau))d\tau. \tag{1.3}$$

此引理的证明是明显的.

定理 1.1. (Peano)(存在性). 如果 f 在 D 中连续, 则对于任何$(t_0,x_0)\in D$, (1.1)至少有一个通过(t_0,x_0)的解.

证明 假设 α 与 β 是这样选取的正数, 使得闭矩形 $B(\alpha,\beta,t_0,x_0)=B(\alpha,\beta)=\{(t,x):t\in I_\alpha,\ \ |x-x_0|\leqslant\beta\}$ 属于 D, 其中 $I_\alpha=I_\alpha(t_0)=\{t:|t-t_0|\leqslant\alpha\}$. 令 $M=\sup\{|f(t,x)|,(t,x)\in B(\alpha,\beta)\}$. 又取 $\bar{\alpha}$ 与 $\bar{\beta}$ 使得 $0<\bar{\alpha}\leqslant\alpha$, $0<\bar{\beta}\leqslant\beta$, $M\bar{\alpha}\leqslant\bar{\beta}$. 在 $\mathscr{C}(I_{\bar{\alpha}},R^n)$中定义函数集合 $\mathscr{A}=\mathscr{A}(\bar{\alpha},\bar{\beta})$, 其中每个 ϕ 满足 $\phi(t_0)=x_0$, 且对 $I_{\bar{\alpha}}$中所有 t 而言, $|\phi(t)-x_0|\leqslant\beta$. 根据第 0 章可知集合 $\mathscr{A}$ 是凸、闭与有界的.

对于 $\mathscr{A}$ 中任一 ϕ，由下述关系式定义 $T\phi$

$$T\phi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds,\ t\in I_{\bar{\alpha}},$$

根据引理 1.1，求 T 的不动点等价于对(1.1)解上述初值问题．现在我们用 Schauder 不动点定理断言，在 $\mathscr{A}$ 中 T 有不动点．

显然对于 $\mathscr{A}$ 中的 ϕ，$T\phi$ 属于 $\mathscr{C}(I_{\bar{\alpha}},R^n)$ 且 $T\phi(t_0)=x_0$．又对于 $t\in I_{\bar{\alpha}}$，由于 $B(\bar{\alpha},\bar{\beta})\subset B(\alpha,\beta)$，

$$|T\phi(t)-x_0|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t} |f(s,\phi(s))|ds\right|\leqslant M|t-t_0|$$
$$\leqslant M\bar{\alpha}\leqslant\bar{\beta},$$

于是 T：$\mathscr{A}\to\mathscr{A}$．又对于 $I_{\bar{\alpha}}$ 中所有 t 与 $\bar{t}$．

$$|T\phi(t)-T\phi(\bar{t})|\leqslant\left|\int_{\bar{t}}^{t} |f(s,\phi(s))|ds\right|\leqslant M|t-\bar{t}|.$$

由此推知集合 $T(\mathscr{A})$是同等连续函数族，因而 $T(\mathscr{A})$的闭包是紧的。

最后，对于 $\mathscr{A}$ 中任何 ϕ 与 $\bar{\phi}$，根据 $f(t,x)$在 $B(\alpha,\beta)$上的一致连续性推知，对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要对于 $I_{\bar{\alpha}}$中所有 s 有 $|\phi(s)-\bar{\phi}(s)|\leqslant\delta$，那么对于 $I_{\bar{\alpha}}$中所有 t 就有

$$|T\phi(t)-T\bar{\phi}(t)|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t} |f(s,\phi(s))-f(s,\bar{\phi}(s))|ds\right|$$
$$\leqslant\varepsilon\bar{\alpha}.$$

这恰巧说明 T 是连续映射；即，对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得如果 $|\phi-\bar{\phi}|\leqslant\delta$ 就有 $|T\phi-T\bar{\phi}|\leqslant\varepsilon\bar{\alpha}$。

这样，Schauder 定理的所有条件都具备了，我们可以断言 $\mathscr{A}$ 有不动点．定理证毕．

推论 1.1. 如果 V 是 D 中开集，闭包 $\bar{V}$ 也在 D 内，而 U 是 D 的紧集，$U\subset V$，那么存在 $\alpha>0$ 使得对于任何初值 $(t_0,x_0)\in U$，(1.1)有通过 (t_0,x_0) 并且至少存在于区间 $t_0-\alpha\leqslant t\leqslant t_0+\alpha$ 上的解．

证明 只要重复定理 1.1 的证明，不过需用对 $\bar{\alpha}$ 与 $\bar{\beta}$ 的进一步限制，以保证对于所有 $(t_0, x_0)\in U$ 有 $B(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, t_0, x_0)\subset V$.

Peano 定理不用 Schauder 定理也能证明，我们来说明一种具体作法——数值分析中的Euler法的思路. 这种方法在于把区间 $I_\alpha=\{t: |t-t_0|\leqslant\alpha\}$ 分成长度都等于 h 的若干段，然后在每一段上用直线来逼近"解". 比较具体地说，对于给定的 h, 在 I_α 上定义函数 ϕ^h:

$$\phi^h(t)=x_0+f(t_0,x_0)(t-t_0), \qquad t_0\leqslant t\leqslant t_0+h,$$

$$\phi^h(t)=\phi^h(t_0+h)+f(t_0+h, \phi^h(t_0+h))(t-t_0-h),$$

$$t_0+h\leqslant t\leqslant t_0+2h,$$

等等. 为使 $(t, \phi^h(t))$ 在 D 内, 可能需把 α 取得甚小. 从图象看, 这就定义了一个折线函数, 如果(1.1)的解存在, 当 h 甚小时, 折线函数应近似于解. 人们可选择序列 $\{h_k\}$ 使得 $k\to\infty$ 时 $h_k\to 0$, 再用 Ascoli-Arzela 定理说明有子序列 ϕ^{h_k} 收敛于(1.1)的一个解.

习题 1.1. 详细地用折线法证明 Peano 定理.

习题 1.2. 叙述一条隐函数定理, 其正确性由存在性定理 1.1 推出.

I.2. 解的延拓

设 ϕ 是某微分方程在区间 I 上的解. 如果区间 $\hat{I}$ 真正地包含 I, $\hat{\phi}$ 在 $\hat{I}$ 上有定义而在 I 上 $\hat{\phi}$ 与 ϕ 相等, 又 $\hat{\phi}$ 在 $\hat{I}$ 上满足那个微分方程, 我们便说 $\hat{\phi}$ 是 ϕ 的一个延拓. 如果解 ϕ 没有延拓, 便是不可延拓的; 也就是说, 区间 I 是解 ϕ 的最大存在区间.

引理 2.1. 如果 D 是 R^{n+1} 中的开集, $f: D\to R^n$ 在 D 上连续而且有界, 那么对于(1.1)的任何一个定义在区间 (a, b) 上的解 $\phi(t)$ 存在 $\phi(a+0)$ 与 $\phi(b-0)$. 如果 $f(b, \phi(b-0))$ 被定义得或者能够定义得使 $f(t, x)$ 在 $(b, \phi(b-0))$ 连续, 那么 $\phi(t)$ 是 (1.1) 在

$(a, b]$上的解. 对于左端点 a 也有同样的结论.

证明 我们先证明极限 $\phi(a+0)$, $\phi(b-0)$存在. 对于(a, b)中任何 t_0,

$$\phi(t)=\phi(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds, a<t<b,$$

而对于 $a<t_1\leqslant t_2<b$,

$$|\phi(t_2)-\phi(t_1)|\leqslant\int_{t_1}^{t_2} |f(s, \phi(s))|ds\leqslant M(t_2-t_1),$$

这里的M是$|f(t, x)|$在D上的上界值. 因此当 $t_1, t_2\to a+0$ 时, $\phi(t_2)-\phi(t_1)\to 0$, 从而知 $\phi(a+0)$存在. 由相似的议论可证明 $\phi(b-0)$存在.

引理最后一个结论从 ϕ 的积分方程来看是显然的.

定理 2.1. 如果D是 R^{n+1} 中的开集, $f:D\to R^n$ 是连续的, 又 $\phi(t)$是(1.1)在某区间上的解, 那么 ϕ 有到最大存在区间的延拓. 此外, 如果(a, b)是(1.1)的解 x 的最大存在区间, 那么当 $t\to a$ 或 $t\to b$ 时$(t, x(t))$趋向于D的边界.

证明 假设 $x(t)$ 是(1.1)在区间 I 上的解. 如果 I 不是最大存在区间, 那么 x 可以引伸到真正包含 I 的某个区间. 因此我们可以假设 I 在一个端点比方说右端点是闭的. 我们先来证明 x 可以引伸到最大右存在区间, 因此可以假定 $I=[a, b]$, 又 x 不可能引伸到$[a, \infty)$. 向左引伸的情形, 证明是很相似的.

假设V是D中的开集, 其闭包 $\bar{V}$ 在D内, 而U是D的紧集, 又 $U\subset V$. 根据推论 1.1, 对于取自U的任何初值, (1.1)在长度为 α的某区间上有解, 此 α 由 U、V 以及 f 在 V 上的上界值所决定. 所以如果 $a\leqslant t\leqslant b$ 时 $x(t)$ 属于 U, 那么 x 有到区间$[a, b+\alpha]$的引伸. 由于U是紧集, 人们可以继续这样作有限步, 一直到把 x 引伸到某个区间$[a, b_0]$以致$(b_0, x(b_0))$不属于 U.

现在，在D中选取一序列开集V_n，使得$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}V_n=D$，并且$\bar{V}_n$是闭的有界集，对于$n=1,2,\cdots$有$\bar{V}_n\subset V_{n+1}$. 对于每个$V_n$，有一个按照上面的方法作出的单调增加序列$\{b_n\}$使得(1.1)的解$x(t)$有到区间$[a,b_n]$的引伸，而$(b_n,x(b_n))$不在$\bar{V}_n$内. 由于$b_n$是上有界的，令$\omega=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 显然$x$已被引伸到区间$[a,\omega)$，而不能进一步再引伸，于是序列$(b_k,x(b_k))$或是无界，或者在$f$的定义域的边界上有极限点.

定理的最后一个结论可以直接由引理2.1推知.

习题2.1. 对于纯量t与x，举出函数$f(t,x)$的这样例子，它在开的有界连通集D上定义而且连续，然而不是(1.1)的每个不可延拓的解ϕ在定义区间(a,b)上有$\phi(a+0)$与$\phi(b-0)$.

上述延拓定理可用到具体例题去检验有否定义在大时间区间上的解. 例如若需说明某解定义在区间(t_0,∞)上，照下面这样作便行了. 如果函数$f(t,x)$对(t_1,∞)中的$t\,(t_1<t_0)$与$|x|<\alpha$是连续的，又能断言某个解$x(t)$对于有定义的所有$t\,(\geqslant t_0)$值满足$|x(t)|\leqslant\beta<\alpha$，那么$x(t)$必然在$[t_0,\infty)$上有定义. 事实上，任取$T\geqslant t_0$及满足$\beta<\gamma<\alpha$的$\gamma$，定义矩形$D_1=\{(t,x):t_0\leqslant t\leqslant T,|x|\leqslant\gamma\}$. $f(t,x)$在D_1上有界，从延拓定理推知解$x(t)$可以延拓到D_1的边界. 但由$\gamma>\beta$推知，$x(t)$所到达的边界点正好在由$t=T$所确定的这一边. 因此$x(t)$存在于$t_0\leqslant t\leqslant T$. 由于$T$是任意的，这就证明了前面的断言.

I.3. 唯一性与连续性

在R^{n+1}中的区域D上定义的函数$f(t,x)$称为对x局部地满足Lipschitz条件，如果对于D中任意闭有界集U，有$k=k_U$使得

$|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant k_U|x-y|$对$U$中$(t,x)$与$(t,y)$成立．如果$f(t,x)$在$D$内有连续的对$x$的一阶偏微商，那么$f(t,x)$对$x$局部地满足 Lipschitz 条件．

如果$f(t,x)$在区域D内连续，则从基本存在性定理推知(1.1)至少有一个解通过D内的给定点(t_0,x_0)．除此之外，再假设仅有一个解$x(t,t_0,x_0)$通过D内的给定点．对于任何$(t_0,x_0)\in D$，令$x(t,t_0,x_0)$的最大存在区间是$(a(t_0,x_0),b(t_0,x_0))$，又在R^{n+2}中令集合

$$E=\{(t,t_0,x_0):a(t_0,x_0)<t<b(t_0,x_0),\ (t_0,x_0)\in D\}.$$

对于E中的(t,t_0,x_0)，当t在所有可能的值中变化时，由$(t,x(t,t_0,x_0))$给出的R^{n+1}中的点集称为通过(t_0,x_0)的轨线．集合E称为$x(t,t_0,x_0)$的定义域．

以$f(t,x)$对x局部地满足 Lipschitz 条件为假设的基本存在性与唯一性定理，通常被叫做 Picard-Lindelöf 定理．这条定理以及附带的信息被包含在

定理 3.1. 如果$f(t,x)$在D内连续，对x局部地满足 Lipschitz 条件，那么对于D中任意(t_0,x_0)，(1.1)有唯一的通过(t_0,x_0)的解$x(t,t_0,x_0)$，$x(t_0,t_0,x_0)=x_0$．并且，函数$x(t,t_0,x_0)$的定义域E是R^{n+2}中的开集，$x(t,t_0,x_0)$在E内连续．

证明 象定理 1.1 的证明中那样定义$I_\alpha=I_\alpha(t_0)$与$B(\alpha,\beta,t_0,x_0)$．对于D的任何给定的闭有界子集U，选取正数α与β，使对于U中每个(t_0,x_0)而言，$B(\alpha,\beta,t_0,x_0)$属于D；而若

$$V=\bigcup\{B(\alpha,\beta,t_0,x_0):\ (t_0,x_0)\text{在}U\text{内}\},$$

则V的闭包也在D内．令$M=\sup\{|f(t,x)|,(t,x)\in V\}$，又设$k$是$f(t,x)$在$V$上对$x$的 Lipschitz 常数．选取$\bar{\alpha}$与$\bar{\beta}$，使得$0<\bar{\alpha}\leqslant\alpha$，$0<\bar{\beta}\leqslant\beta$，$M\bar{\alpha}\leqslant\bar{\beta}$，$k\bar{\alpha}<1$．又令$\mathscr{F}=\{\phi\in\mathscr{C}(I_{\bar{\alpha}}(0),R^n):\ \phi(0)=0$；对于$t\in I_{\bar{\alpha}}(0)$，$|\phi(t)|\leqslant\bar{\beta}\}$．对于任意$\phi\in\mathscr{F}$，定义把$I_{\bar{\alpha}}(0)$映入

R^n 的连续函数 $T\phi$

$$T\phi(t)=\int_{t_0}^{t_0+t}f(s,\ \phi(s-t_0)+x_0)ds,\quad t\in I_{\bar{\alpha}}(0).\qquad(3.1)$$

按照引理 1.1,T 在$\mathscr{F}$内的不动点与 (1.1) 的解 $x(t)=\phi(t-t_0)+x_0$ 相同,此解通过 (t_0,x_0),而 $(t,\ x(t))$ 在 $B(\bar{\alpha},\bar{\beta},\ t_0,x_0)$ 内. 显然,$T\phi(0)=0$,又容易看出对于所有 $t\in I_{\bar{\alpha}}(0)$,$|T\phi(t)|\leqslant M\bar{\alpha}\leqslant\bar{\beta}$. 因此,$T\mathscr{F}\subset\mathscr{F}$. 此外,对于 $t\in I_{\bar{\alpha}}(0)$, $|T\phi(t)-T\bar{\phi}(t)|\leqslant k\bar{\alpha}|\phi-\bar{\phi}|$,或写成 $|T\phi-T\bar{\phi}|\leqslant k\bar{\alpha}|\phi-\bar{\phi}|$. 由于 $k\bar{\alpha}<1$, 故 T 是由$\mathscr{F}$入$\mathscr{F}$的压缩映射. 因为$\mathscr{F}$是闭集, 所以 T 在$\mathscr{F}$内有唯一的不动点 $\phi(t,t_0,x_0)$,于是 (1.1) 有唯一的通过 (t_0,x_0) 的解, 并且 $(t,x(t))$ 属于 $B(\bar{\alpha},\bar{\beta},\ t_0,x_0)$.

如果把映射 T 当作 (t_0,x_0) 的一个函数; 也就是说 $T=T_{(t_0,x_0)}$,则上面的论证说明对于 $(t_0,x_0)\in U$, $T_{(t_0,x_0)}$是$\mathscr{F}$上的一致压缩. 从定理 0.3.2 得知, $\phi(\cdot,\ t_0,\ x_0)$ 是 $(t_0,\ x_0)$ 的连续函数. 这意味着 $\phi(t,\ t_0,x_0)$ 是 (t_0,x_0) 的对 t 一致的连续函数. 但 $\phi(t,\ t_0,\ x_0)$ 显然对 t 连续,因之它是 $(t,\ t_0,x_0)$ 的连续函数,这里 $t\in I_{\bar{\alpha}}(0)$, $(t_0,x_0)\in U$. 终于得知, $x(t,\ t_0,\ x_0)=\phi(t-t_0,\ t_0,\ x_0)+x_0$ 是 $(t,\ t_0,x_0)$ 当 $t\in I_{\bar{\alpha}}(t_0)$,$(t_0,x_0)\in U$ 时的连续函数.

由上述局部唯一性的证明可推知整体唯一性. 事实上, 如果 (1.1) 有满足 $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ 的两个解 $x(t)$ 与 $y(t)$,又有数 s 使得 $x(s)=y(s)$ 而在 s 的任意邻域中却有 s 使得 $x(s)\neq y(s)$,那么对于 s 的某个邻域中的 t,我们可以把由 $x(t)$,$y(t)$ 所定义的轨道包含在某个全部被包含于 D 内的紧集 U 中. 但上面的证明指出 (1.1) 通过 U 由任何点只有唯一解,这就产生一个矛盾.

现在假设 $(s,\ t_0,x_0)$ 是 $x(s,\ t_0,x_0)$ 的定义域 E 中的任意给定的点. 为使记号简易, 我们假设 $s\geqslant t_0$. $s\leqslant t_0$ 的情形可按同样方式处理. 闭集合 $U=\{(s,\ t,x(t,\ t_0,x_0));\ \ t_0\leqslant s\leqslant t\}$ 是属于 E 的. 因

而用前面的结果可以看出$x(t,\xi,\eta)$是(t,ξ,η)当$|t-\xi|\leqslant\bar{\alpha}$、$(\xi,\eta)\in U$时的连续函数，于是存在整数$k$使得$t_0+k\bar{\alpha}>s\geqslant t_0+(k-1)\bar{\alpha}$. 根据唯一性，等式$x(t+t_0+\bar{\alpha},t_0,x_0)=x(t+t_0+\bar{\alpha},t_0+\bar{\alpha},x(t_0+\bar{\alpha},t_0,x_0))$对任意$t$成立．而由前面的说明得知这个函数当$|t|\leqslant\bar{\alpha}$时连续. 于是只要$(\xi,t_0,x_0)\in E$,那么$x(\xi,t_0,x_0)$是当$|\xi-t_0|\leqslant 2\bar{\alpha}$、$(t_0,x_0)\in D$时的连续函数．用明显的归纳法便证明$x(s,t_0,x_0)$在$s$的连续性．从前面的论证还可推知$E$是开集．这就证明了定理.

定理 3.2. 如果在定理3.1的假设之外再设函数$f=f(t,x,\lambda)$依赖于在R^k中的闭集G内取值的参数λ，它对于D中的(t,x)与G中的λ连续，具有与G中λ无关的、对于x的局部Lipschitz常数，那么对于每个$(t_0,x_0)\in D$、$\lambda\in G$，存在唯一通过(t_0,x_0)的解$x(t,t_0,x_0,\lambda)$, $(x(t_0,t_0,x_0,\lambda)=x_0)$，它是在定义域内$(t,t_0,x_0,\lambda)$的连续函数.

证明 证明与定理3.1的证明实际上是相同的，只是需取$M=\sup\{|f(t,x,\lambda)|:(t,x,\lambda)\in V\times G_1\}$，取$k$为独立于$\lambda$的、在$V\times G_1$上对于$x$的局部Lipschitz常数，这里的$G_1$是$G$中任意的闭有界集.

由于压缩原理在定理3.1与3.2中被用来证明通过(t_0,x_0)的解的局部存在性与唯一性, 于是可用逐次逼近法求解

$$x^{(n+1)}=Tx^{(n)},\qquad n=0,1,2,\cdots,$$
$$Tx(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds,\qquad |t-t_0|\leqslant\bar{\alpha},\tag{3.2}$$

这里的$x^{(0)}$是任意满足$|t-t_0|\leqslant\bar{\alpha}$时$|x^{(0)}(t)-x_0|\leqslant\bar{\beta}$的、把区间$|t-t_0|\leqslant\bar{\alpha}$映入$R^n$的连续函数．选取常数$\bar{\alpha}$、$\bar{\beta}$使得$M\bar{\alpha}\leqslant\bar{\beta}$与$k\bar{\beta}<1$，其中$M$与$k$是在某个紧集上$f(t,x)$的界与$f(t,x)$对于$x$的Lipschitz常数．$x^{(0)}(t)$显然可取为常函数$x_0$．现在，如果直接

作逐次逼近(3.2)，可以证明迭代收敛而方程(1.1)在区间$|t-t_0|\leqslant\bar{\alpha}$的解唯一，这里只需假定$M\bar{\alpha}\leqslant\bar{\beta}$而不需限定$k\bar{\alpha}<1$. 由此看来似乎压缩原理不及逐次逼近有效，但是在第0章中我们是有意引进压缩原理来代替逐次逼近的. 这是一个矛盾，但是只要考虑到在对于$[t_0, t_0+\bar{\alpha}]$中的t满足$|x(t)-x_0|\leqslant\bar{\beta}$的连续函数的空间上，存在许多等价的范数就可解决它. 事实上，由

$$|x|=\sup_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+\beta}\{e^{-k(t-t_0)}|x(t)|\}$$

所定义的范数$|\cdot|$等价于前面用到的上确界范数. 而采用这种范数以后，容易说明只要假设$M\bar{\alpha}\leqslant\bar{\beta}$，$T$便是压缩，而这正是逐次逼近法的结论. 你怎样在$[t_0-\bar{\alpha}, t_0]$上解决上述矛盾？

关于逐次逼近法的要说明的另一事项是，对于任意满足适当的界限的初值$x^{(0)}$，由(3.2)定义的序列总是收敛的. 如果$x^{(0)}(t)$选得比较巧妙，序列就收敛得快. 特别若$x^{(0)}(t)$取为解本身，一次迭代便得到不动点. 要有效地使用这个方法，必需熟练的技巧.

习题 3.1. 直接证明逐次逼近序列(3.2)对$M\bar{\alpha}\leqslant\bar{\beta}$收敛，这里的$M$是$f$在$\{(t,x):|t-t_0|\leqslant\bar{\alpha}, |x-x_0|\leqslant\bar{\beta}\}$上的界.

下面我们介绍关于解对参数与初值的依赖性的另一些结果.

定理 3.3. 设$(t,x)\in D$, $\lambda\in G\subset R^k$, G是一个开集. 如果函数$f(t,x,\lambda)$对于x,λ的一阶偏导数连续，则方程

$$\dot{x}=f(t,x,\lambda) \tag{3.3}$$

的满足$x(t_0, t_0, x_0, \lambda)=x_0$的解$x(t, t_0, x_0, \lambda)$在定义域内对于$t$、$t_0$、$x_0$、$\lambda$连续可微. 矩阵$\partial x(t, t_0, x_0, \lambda)/\partial\lambda$满足$\partial x(t_0, t_0, x_0, \lambda)/\partial\lambda=0$及矩阵微分方程

$$\dot{y}=\frac{\partial f(t, x(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)}{\partial x}y+\frac{\partial f(t, x(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)}{\partial\lambda}, \tag{3.4}$$

矩阵$\partial x(t, t_0, x_0, \lambda)/\partial x_0$满足$\partial x(t_0, t_0, x_0, \lambda)/\partial x_0=I$(单位方阵)及线性变分方程

$$\dot{y}=\frac{\partial f(t,x(t,t_0,x_0,\lambda),\lambda)}{\partial x}y. \tag{3.5}$$

并且，

$$\frac{\partial x(t,t_0,x_0,\lambda)}{\partial t_0}=-\frac{\partial x(t,t_0,x_0,\lambda)}{\partial x_0}f(t_0,x_0,\lambda). \tag{3.6}$$

证明 像定理 3.2 一样，我们应用第 0 章定理 3.2. 如果 $\gamma=(x_0,\lambda)$，而 $T=T_\gamma$ 由(3.1)所定义，那么必须计算 $T_\gamma\phi$ 对于 γ、ϕ 的导数 $A(\gamma,\phi)$、$B(\gamma,\phi)$. 容易证明，$A(\gamma,\phi)$ 可表为 $n\times(n+k)$ 矩阵

$$A(\gamma,\phi)(t)=\left[\int_{t_0}^{t_0+t}\left(\frac{\partial f(s,\phi(s-t_0)+x_0,\lambda)}{\partial x}\right)ds,\right.$$
$$\left.\int_{t_0}^{t_0+t}\left(\frac{\partial f(s,\phi(s-t_0)+x_0,\lambda)}{\partial\lambda}\right)ds\right],$$

而微分 $B(\gamma,\phi)\psi$ 由

$$[B(\gamma,\phi)\psi](t)=\int_{t_0}^{t_0+t}\frac{\partial f(s,\phi(s-t_0)+x_0,\lambda)}{\partial x}\psi(s)ds$$

给出.

如同在定理 3.2 的证明中那样，相对于集合 $V\times G_1$ 来选取常数 M 与 k，这里的 G_1 是 G 内的闭有界集. 这样一来，$\phi(t,t_0,x_0,\lambda)$ 对于 x_0、λ 的可微性的证明便恰好按照定理 3.1 的证明来作. 函数 $x(t,t_0,x_0,\lambda)=\phi(t-t_0,t_0,x_0,\lambda)+x_0$ 显然在 (t,x_0,λ) 可微.

得知可微性以后，便可直接推出关系式(3.4)与(3.5). 为了得到关系式(3.6)，注意从解的唯一性推知对于任意充分小的 h 有 $x(t,t_0,x_0,\lambda)=x(t,t_0+h,x(t_0+h,t_0,x_0,\lambda),\lambda)$，原因是这两个函数在 t_0+h 都满足方程并且取相同的值. 由此得

$$\begin{aligned}&x(t,t_0+h,x_0,\lambda)-x(t,t_0,x_0,\lambda)\\&=x(t,t_0+h,x_0,\lambda)-x(t,t_0+h,x(t_0+h,t_0,x_0,\lambda),\lambda).\end{aligned}$$

从而知 $x(t,t_0,x_0,\lambda)$ 在 t_0 可微，且关系(3.6)成立. 这就完成了定

理的证明.

对 f 作相应的假定以后，反复应用上述定理可以得到 $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ 的高阶导数.

习题 3.2. 如果 $f(t, x)$ 对 x 的偏导数直到 k 阶都是连续的，证明(1.1)的满足 $x(t_0, t_0, x_0)=x_0$ 的解 $x(t, t_0, x_0)$ 有对 x_0 的 k 阶连续导数. 试求对 x_0 的 j 阶导数所满足的微分方程，并且注意，在 x_0 的邻域内 $x(t, t_0, y)$ 对 y 的 Taylor 级数只要通过求解非齐次线性方程就可得到.

习题 3.3. 如果 $f(t, x)$ 对 x 在 x_0 的邻域内解析说明存在包含 t_0 的区间，使得习题 3.2 中的函数 $x(t, t_0, x_0)$ 在 x_0 的邻域内解析.

习题 3.4. 如果 $f(t, x, \lambda)$ 对 x、λ 的偏导数直到 k 阶都是连续的，证明(3.3)的满足 $x(t_0, t_0, x_0, \lambda)=x_0$ 的解 $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ 有对 x_0、λ 的 k 阶连续导数. 求对 λ 的偏导数所满足的微分方程. 讨论在某点邻域内确定 Taylor 级数的方法.

习题 3.5. 如同习题 3.2，讨论当 $f(t, x, \lambda)$ 满足某些解析性条件时 $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ 对 λ 的解析性.

习题 3.6. 证明当 $|B(t)|$，$|A(t)|$ 连续且有界时，方程 $\dot{x}=(A(t)+\lambda B(t))x$ 的解是 λ 的整函数. 你能推广这个结论吗?

习题 3.7. 假设 $f(t, x, y)$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$, x, $y\in(-\infty, \infty)$ 时连续，并且对 x, y 的一阶导数连续，又边界值问题

$$\ddot{x}=f(t, x, \dot{x}),\quad x(0)=a,\quad x(1)=b$$

在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时有解. 如果对于 $t\in[0,1]$ 及一切 x、y 有 $\partial f(t, x, y)/\partial x>0$，证明存在 $\varepsilon>0$ 使得边界值问题

$$\ddot{x}=f(t, x, \dot{x}),\quad x(0)=a,\quad x(1)=\beta$$

对于 $0\leqslant t\leqslant 1$ 与 $|\beta-b|\leqslant\varepsilon$ 有解. 提示：考虑初始值问题

$$\ddot{x}=f(t, x, \dot{x}),\quad x(0)=a,\quad \dot{x}(0)=\alpha$$

的解 $\psi(t,\alpha)$，令 $\psi(t,\alpha_0)=\phi(t)$. 对于充分小的 $\alpha-\alpha_0$，$\psi(t,\alpha)$ 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时存在. 如果 $u(t)=\partial\psi(t,\alpha_0)/\partial\alpha$, 则

$$\ddot{u}-\frac{\partial f(t,\phi(t),\dot{\phi}(t))}{\partial y}\dot{u}-\frac{\partial f(t,\phi(t),\dot{\phi}(t))}{\partial x}u=0,$$

且 $u(0)=0,\dot{u}(0)=1$. 证明 u 单调非减，并由此得 $u(1)>0$. 再用隐函数定理从 $\psi(1,\alpha)-\beta=0$ 解出 α 作为 β 的函数.

方程(3.5)称为线性变分方程，这是由于下述理由. 如果 $x(t)=z(t)+x(t,t_0,x_0,\lambda)$ 是(3.3)的解，则

$$\dot{z}(t)+\frac{\partial x(t,t_0,x_0,\lambda)}{\partial t}=f(t,z(t)+x(t,t_0,x_0,\lambda),\lambda)$$

由此推知当 $|z(t)|$ 趋于零时

$$\begin{aligned}\dot{z}(t)&=f(t,z(t)+x(t,t_0,x_0,\lambda),\lambda)-f(t,x(t,t_0,x_0,\lambda),\lambda)\\&=\frac{\partial f(t,x(t,t_0,x_0,\lambda),\lambda)}{\partial x}z(t)+o(|z(t)|).\end{aligned}$$

于是方程(3.5)表示(3.3)的真正解与给定解 $x(t,t_0,x_0,\lambda)$ 的变差 $z(t)$ 所满足方程的一次近似，线性变分方程是在 z 的方程中忽略掉高于一阶的项之后得到的.

定理 3.1 与 3.2 关于 $x(t,t_0,x_0,\lambda)$ 的连续性质的结论在比所述的要弱得多的假设下也是正确的. 事实上，如果我们假定解 $x(t,t_0,x_0)$ 唯一(当对 x 局部 Lipschitz 条件满足时，就意味着它成立)，则可以直接证明它必然对 (t,t_0,x_0) 连续. 在研究微分不等式时，需要一个这样的结论，现在叙述如下：

引理 3.1. 假设 $\{f_n\}$, $n=1,2,\cdots$ 是在 R^{n+1} 内的开集 D 上定义而且连续的函数序列，又在 D 的紧子集上一致地有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f_0$. 假设 (t_n,x_n) 是 D 内的点序列，当 $n\to\infty$ 时收敛到 D 内的 (t_0,x_0)，又设 $\phi_n(t)$, $n=0,1,2,\cdots$ 是方程 $\dot{x}=f_n(t,x)$ 的通过点 (t_n,x_n) 的解. 如果 $\phi_0(t)$ 定义在 $[a,b]$ 上，并且唯一，则存在整数 n_0 使得对每一

个 $n\geqslant n_0$, $\phi_n(t)$在$[a,b]$上定义,并且在$[a,b]$上一致收敛到 $\phi_0(t)$.

证明 设U是D的紧子集，在其内部包含集合$\{(t, \phi_0(t)), a\leqslant t\leqslant b\}$, 又假设在$U$上$|f_0|<M$. 则当 n_0 充分大而 $n\geqslant n_0$ 时，必然有$|f_n|<M$. 象基本存在性定理证明中那样选取 $\bar{\alpha}$、$\bar{\beta}$ 以致 $M\bar{\alpha}\leqslant\bar{\beta}$, 可保证对于充分大的$n$, 所有 $\phi_n(t)$在$[t_n, t_n+\bar{\alpha}]$上定义. 如果$[\delta, \gamma]=\bigcap\limits_n[t_n, t_n+\bar{\alpha}]$, 则 $t_n\to t_0$ 意味着 $\delta<\gamma$. 同时，对充分大的n, 所有的 ϕ_n 定义在$[\delta,\gamma]$上. 由于$|f_n|<M$, 序列$\{\phi_n\}$一致有界且同等连续. 于是存在子序列，在$[\delta,\gamma]$上一致收敛，我们仍把这个子序列记作ϕ_n,把它的极限函数记作$\bar{\phi}$. 利用积分方程，我们看出$\bar{\phi}$便是 ϕ_0. 由于 ϕ_n 的每个收敛子序列在$[\delta, \gamma]$上也必然收敛到 ϕ_0(根据 ϕ_0 的唯一性), 故 ϕ_n 在$[\delta, \gamma]$上收敛到 ϕ_0. 由于对$[a,b]$内的 t, 集合$\{t,\phi(t)\}$是紧的，相继在长度为 $\gamma-\delta$ 的区间上进行论证，直到$[a,b]$被复盖为止，便可完成证明.

定理 3.4. 假设当(t, x) 在开集D内而 λ 在 R^p 内 λ_0 的邻域内时，$f(t, x, \lambda)$是(t,x,λ)的连续函数. 如果$x(t, t_0, x_0, \lambda_0)$是(3.3)在$[a,b]$上满足 $x(t_0, t_0, x_0, \lambda_0)=x_0$ 的解，并且唯一，则(3.3)有满足 $x(s,s,\eta,\lambda)=\eta$ 的解 $x(t,s,\eta,\lambda)$, 它对于充分接近 t_0, x_0, λ_0的所有 s, η, λ 而言在 $[a, b]$上有定义，并且是 (t, s, η, λ)在(t, t_0, x_0, λ_0)的连续函数.

证明 引理 3.1 意味着$x(t,s,\eta,\lambda)$是 s, η, λ 在 t_0, x_0, λ_0 的对于$[a,b]$内的 t 一致的连续函数. 于是对于任意 $\varepsilon>0$, 有 $\delta_1>0$ 使得如果$|(s,\eta,\lambda)-(t_0,x_0,\lambda_0)|<\delta_1$, 便有

$$|x(t, s, \eta, \lambda)-x(t, t_0, x_0, \lambda_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于$x(t, t_0, x_0, \lambda_0)$是 t 在$[a,b]$内的连续函数，存在 δ_2 使得如果$|t-\tau|<\delta_2$, 便有

$$|x(t, t_0, x_0, \lambda_0) - x(\tau, t_0, x_0, \lambda_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. 于是只要 $|(s, \eta, \lambda) - (t_0, x_0, \lambda_0)| + |t - \tau| < \delta$，便有

$$\begin{aligned}
&|x(t, s, \eta, \lambda) - x(\tau, t_0, x_0, \lambda_0)| \\
\leqslant &|x(t, s, \eta, \lambda) - x(t, t_0, x_0, \lambda_0)| + |x(t, t_0, x_0, \lambda_0) \\
&- x(\tau, t_0, x_0, \lambda_0)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

这就证明了定理 3.4.

在适当的假定之下，微分方程的解定义把 R^n 的子集映入 R^n 的同胚. 事实上，让我们假设对于 D 内任意的 (t_0, x_0)，方程(1.1)有唯一解 $x(t, t_0, x_0)$，此解是在定义域内 (t, t_0, x_0) 的多元连续函数. 如果 $x(t, t_0, x_0)$ 在区间 $[a, b]$ 上存在，则有 x_0 的邻域 $U(x_0)$，对于 $U(x_0)$ 中的 x_1 与 $[a, b]$ 中的 t，解 $x(t, t_0, x_1)$ 存在. 对于固定的 t_0 与 $[a, b]$ 中的每个 t，函数 $x(t, t_0, \cdot)$ 可以看作由 $U(x_0)$ 入 $x(t, t_0, x_0)$ 的邻域的映射 T_t. 根据假定，映射 T_t 是一对一的，并且连续，又 $T_t^{-1} x^* = x(t_0, t, x^*)$. 于是它的反函数也是连续的，这意味着 T_t 是一个同胚.

现在我们可以定义(1.1)的通解了. 设 U 是 R^n 内开的连通集，又 ϕ: $R \times U \to R^n$ 满足：(a)对于 U 内任意的 c，$\phi(t, c)$ 是(1.1)的解；(b)对于 R 内任意的 t_0，映射 $\phi(t_0, \cdot)$：$U \to R^n$ 是同胚. 这样的函数 ϕ 叫做(1.1)的(局部)通解.

I.4. 连续依赖性与稳定性

设函数 $f(t, x)$ 对 R^{n+1} 内所有 (t, x) 有定义，对于 $(-\infty, \infty)$ 内所有 t，$f(t, 0) = 0$. 我们来考虑方程 $\dot{x} = f(t, x)$. 对于 R^{n+1} 内任意 (t_0, x_0)，我们假设此方程有满足 $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ 的唯一解 $x(t, t_0, x_0)$，它在定义域内是 (t, t_0, x_0) 的多元连续函数. 由于对所

有 t 有 $f(t,0)=0$，推知 $x=0$ 是 $(-\infty,\ \infty)$ 上的解．连续依赖性的假设意味着给定任意实数 t_0 及 $T\geqslant 0$，存在 $\delta(T)>0$ 使得满足 $|x_0|\leqslant\delta(T)$ 的解 $x(t,t_0,x_0)$ 存在于 $[t_0,\ t_0+T]$ 上，并且当 $|x_0|\to 0$ 时在 $[t_0,\ t_0+T]$ 上对 t 一致地有 $|x(t,t_0,x_0)|\to 0$．换句话说，给定任意 $T>0$ 与任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,T,\ t_0)$ 使得解 $x(t,t_0,x_0)$ 存在于 $I=[t_0,\ \ t_0+T]$，且只要 $|x_0|<\delta(\varepsilon,\ T,\ t_0)$ 就在 I 上有 $|x(t,t_0,x_0)|<\varepsilon$．（见图 4.2）．

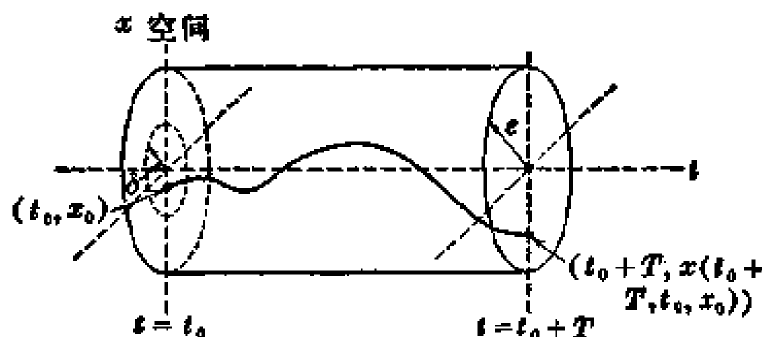


图 I.4.2

让我们对于方程 $\dot{x}=x^2$ 详细讨论对初始数据的连续依赖性的意义．取 $t_0=0$ 且令 $x_0=c$．这个方程的解 $x(t,\ t_0,\ x_0)=x(t,0,c)$ 是 $x\ (t,\ 0,\ c)=-c/(ct-1)$．由唯一性推知它是满足 $x(0)=c$ 的解．显然 $x(t,0,c)$ 在定义域内对 t,c 连续．由于 $x(t,0,0)=0$，这意味着对于任意 $T>0$ 与任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,T)>0$ 使得如果 $|c|<\delta$ 就有 $|x(t,\ 0,\ c)|<\varepsilon$．$\delta$ 的最大值满足 $\delta/(1-\delta T)=\varepsilon$．当 T 增大时，δ 必然减小，而且事实上当 $T\to\infty$ 时 δ 必定趋于 0．这意味着 $x(t,0,c)$ 对 c 的连续性相对于无穷区间 $[0,\ \infty)$ 内的 t 不是一致的．对于这个方程，甚至没有满足 $x(0)=c>0$ 的解存在于 $[0,\infty)$ 上．

虽然对参数与初始数据的连续依赖性是重要的，但如同上面所指明的，它只给出了有限时间区间上的知识．一个更加重要的概念是在无限时间区间上关于初始数据的连续依赖性．它就是稳定性的概念．在这一节的剩下部分里，我们假设 f 充分地光滑以

保证存在性，唯一性与关于参数的连续依赖性.

定义 假设 f: $[0, \infty) \times R^n \to R^n$. 考虑 $\dot{x}=f(t,x)$, 这里对 $t \in [0,\infty)$ 有 $f(t,0) \equiv 0$. 解 $x=0$ 称为Liapunov稳定的，如果对于任意 $\varepsilon>0$ 与任意 $t_0 \geqslant 0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon, t_0)$，使得 $|x_0|<\delta$ 意味着 $t\in[t_0,\infty)$ 时 $|x(t, t_0, x_0)|<\varepsilon$. 解 $x=0$ 称为一致稳定的，如果它稳定，并且 δ 可选取得独立于 $t_0 \geqslant 0$. 解 $x=0$ 称为渐近稳定的，如果它稳定，并且存在 $b=b(t_0)$，使得 $|x_0|<b$ 意味着 $t\to\infty$ 时 $|x(t, t_0, x_0)|\to 0$. 解 $x=0$ 称为一致渐近稳定的，如果它一致稳定，并且渐近稳定定义中的 b 可选取得不依赖于 $t_0 \geqslant 0$，而且对于每个 $\eta>0$，存在 $T(\eta)>0$，使得 $|x_0|<b$ 意味着当 $t \geqslant t_0+T(\eta)$ 时 $|x(t, t_0, x_0)|<\eta$. 解 $x=0$ 称为不稳定的，如果它不是稳定的.

从图象上说，稳定性与上面的图相同，只是解当 $t \geqslant t_0$ 时必留在半径为 r 的无穷长圆柱内.

对于方程的任意一个另外的解 $\bar{x}(t)$，在用 $\bar{x}+y$ 代替 x 以后，讨论方程 $\dot{y}=f(t,\bar{x}+y)-f(t,\bar{x})$ 的零解，我们就是讨论 $\bar{x}(t)$ 的稳定性与渐近稳定性了. 有关任意解 $\bar{x}(t)$ 的稳定性的各个定义与上面相同，只是要用 $x-\bar{x}(t)$ 代替 x.

引理 4.1. 如果系统(1.1)是自治的或对 t 为周期的，则(1.1)的解 $x=0$ 是稳定的(渐近稳定的)这个事实意味着 $x=0$ 是一致稳定的(一致渐近稳定的).

习题 4.1. 证明引理 4.1.

习题 4.2. 讨论方程 $\dot{x}=-x(1-x)$, $\ddot{x}+x=0$ 与 $\ddot{x}+2^{-1}[x^2+(x^4+4\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}]x=0$ 的每个解的稳定性与渐近稳定性. 其中最后一个方程有解族 $x=c\sin(ct+d)$，这里的 c, d 是任意常数.

上面定义的稳定性依赖于 t_0，是否意味着解 $x=0$ 对某个 t_0 值是稳定的，而对另一个 t_1 值却不稳定呢？回答是不！当 $t_1 \leqslant t_0$ 时，直接从对初始数据的连续性可得到这个结论. 事实上，$x=0$ 稳

定意味着存在$\delta(t_0,e)>0$，使得由$|x_0|\leqslant\delta(t_0,e)$推知$t\geqslant t_0$时$|x(t,t_0,x_0)|<e$. 对初始数据的连续性意味着存在$\delta_1=\delta_1(t_1,e,t_0,\delta)>0$，使得由$|x_1|<\delta_1(t_1,e)$推知$t_1\leqslant t\leqslant t_0$时$|x(t,t_1,x_1)|<\delta(t_0,e)$. 于是，只要$|x_1|<\delta_1(t_1,e)$，$t\geqslant t_1$时就有$|x(t,t_1,x_1)|<e$；即对$t_1$而言稳定. 当$t_1\geqslant t_0$时，没有这么明显. 令$V(t_1,e)=\{x\in R^n: x=x(t_1,t_0,x_0)$，$x_0$在中心为零点半径等于$\delta(t_0,e)$的开球内$\}$. 由于映射$x(t_1,t_0,\cdot)$是同胚，存在$\delta_1(t_1,e)$，使得$\{x:|x|\leqslant\delta_1(t_1,e)\}\subset V(t_1,e)$. 对此$\delta_1(t_1,e)$，当$t\geqslant t_1$与$|x_1|\leqslant\delta(t_1,e)$时，$|x(t,t_1,e)|<e$；即对$t_1$而言稳定.

习题 4.3. 在上述解$x=0$渐近稳定的定义中，我们假设了$x=0$稳定，并且初始值在零的邻域中的解当$t\to\infty$时趋于零. 是否可能$x=0$不稳定但却具备后一性质？说明若x是纯量，这不可能发生. 请举出所有解当$t\to\infty$时趋于0但$x=0$不稳定的二维例子，能否给出二维自治系统的例子？

在这里详细讨论稳定性是不适当的，但我们还要不断阐述这个概念的许多性质.

I.5. 微分方程概念的引伸

在I.1节中，微分方程是对连续向量场f定义的. 作为直接的后果，(1.1)的初始值问题等价于积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds. \tag{5.1}$$

对于连续的f，这个方程的任何解自动地具有连续的一阶导数。另一方面，如果不要求x有连续的一阶导数，(5.1)显然对比较一般的一类函数f也有意义. 本节的目的是对一类函数f精确地叙述这些想法.

假设D是R^{n+1}内的开集，而f: $D\to R^n$不一定连续. 问题是

求定义在实区间 I 上的绝对连续函数 x，使得 t 在 I 内时 $(t, x(t))\in D$，并且

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t)) \tag{5.2}$$

对 I 内除开一个 Lebesgue 测度为零的集合以外的所有 t 成立。如果这样的函数 x 与区间 I 存在，我们说 x 是(5.2)的解。(5.2)的通过(t_0, x_0) 的解是它的满足 $x(t_0)=x_0$ 的解 x。我们将不重复地说"除开在一个 Lebesgue 测度为零的集合上"，因为它总是被认为显然成立的。

假设 D 是 R^{n+1} 内的开集。我们说 f: $D\to R^n$ 在 D 上满足 Carathéodory 条件，如果对于每个固定的 x 而言 f 对 t 可测，对于每个固定的 t 而言 f 对 x 连续，并且对于 D 的每个紧子集 U，存在可积函数 $m_U(t)$ 使得

$$|f(t, x)|\leqslant m_U(t), \qquad (t, x)\in U. \tag{5.3}$$

对于在区域 D 上满足 Carathéodory 条件的函数 f，第 1 与 2 节中的结论不需改变便成立。如果函数 $f(t, x)$ 也是对 x 局部地满足 Lipschitz 条件，并且 Lipschitz 函数是可测的，则解的唯一性仍旧正确。这些结果叙述在下面，但是只给出存在性定理证明的细节，因为其它的证明实际上是相同的。

定理 5.1. (Carathéodory). 如果 D 是 R^{n+1} 内的开集，而 f 在 D 上满足 Carathéodory 条件，则对于 D 内任意的(t_0, x_0)，(5.1)有通过(t_0, x_0)的解。

证明 假设 α, β 是这样选取的正数，矩形 $B(\alpha, \beta)=\{(t, x)$: $|t-t_0|\leqslant\alpha$, $|x-x_0|\leqslant\beta\}$在 D 内。令 $I_\alpha=\{t\text{: } |t-t_0|\leqslant\alpha\}$，$m=m_{B(\alpha,\beta)}$，$M(t)=\int_{t_0}^{t} m(s)ds$。选取 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 使得 $0<\bar{\alpha}\leqslant\alpha$，$0<\bar{\beta}\leqslant\beta$，当 $t\in I_{\bar{\alpha}}$ 时 $M(t)\leqslant\bar{\beta}$。设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}(I_{\bar{\alpha}}, R^n)$内满足 $\phi(t_0)=x_0$，$t\in I_{\bar{\alpha}}$ 时 $|\phi(t)-x_0|\leqslant\bar{\beta}$ 的函数 ϕ 的集合。$\mathscr{A}$ 是$\mathscr{C}(I_{\bar{\alpha}}, R^n)$的闭有界凸

子集.

对于$\mathscr{A}$内的任意 ϕ, 定义函数 $T\phi$ 为

$$T\phi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds, \qquad t\in I_{\bar{\alpha}}.$$

T 在$\mathscr{A}$内的不动点与(5.2)在$\mathscr{A}$内的解相同. 现在用 Schauder 定理证明T在$\mathscr{A}$内有不动点.

对于$\mathscr{A}$内任何 ϕ, 由于 $f(s,\phi(s))$对$\mathscr{A}$内的 ϕ 可积, 故算子T是意义明确的. 又 $T\phi(t_0)=x_0$, 并且 $t\in I_{\bar{\alpha}}$ 时 $T\phi(t)$连续. 利用(5.3), 知

$$\begin{aligned}|T\phi(t)-x_0| &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |f(s,\ \phi(s))|\,ds\right| \\ &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} m(s)\,ds\right| = M(t)\leqslant\bar{\beta}\end{aligned}$$

对所有 $t\in I_{\bar{\alpha}}$ 成立. 因此, T: $\mathscr{A}\to\mathscr{A}$.

算子T在$\mathscr{A}$上连续. 事实上, 如果 $\phi_n\in\mathscr{A}$, $\phi_n\to\phi\in\mathscr{A}$, 则由于对每个固定的 t, $f(t,x)$是 x 的连续函数, 故对每个 $t\in I_{\bar{\alpha}}$, 当 $n\to\infty$ 时 $f(t,\ \phi_n(t))\to f(t,\ \phi(t))$. 由于$|f(t,\ \phi_n(t))|\leqslant m(t)$, Lebesgue 控制收敛定理意味着对 $I_{\bar{\alpha}}$ 内每个 t, 当 $n\to\infty$ 时

$$\int_{t_0}^{t} f(s,\phi_n(s))ds\to\int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds.$$

这证明了断言.

对于$\mathscr{A}$内任何 ϕ,

$$|T\phi(t)-T\phi(\tau)|\leqslant|M(t)-M(\tau)|$$

对 $I_{\bar{\alpha}}$ 内所有 t,τ 成立. 由于M在 $I_{\bar{\alpha}}$ 上连续, 它一致连续, 于是 $T\mathscr{A}$ 是$\mathscr{C}(I_{\bar{\alpha}}, R^n)$的同等连续集, 它还是一致有界集. 这证明 $T\mathscr{A}$ 是相对紧集, 于是 T 是完全连续的. Schauder 不动点定理意味着在$\mathscr{A}$内存在不动点, 定理就证明了.

定理 5.2. 如果D是 R^{n+1} 内的开集, f 在D上满足 Carathéo-

dory 条件，而 ϕ 是(5.2)的在某区间上的解，则 ϕ 有到最大存在区间的延拓．而且，如果(a,b)是(5.2)的最大存在区间，则当 $t\to a$ 与 $t\to b$ 时，$x(t)$趋于D的边界．

证明 实际上与定理 2.1 的证明相同．留给读者去做．

定理 5.3．假设D是R^{n+1}内的开集，f在D上满足 Carathéodory 条件，而且对于D内每个紧集U，存在可积函数 $k_U(t)$ 使得

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant k_U(t)|x-y|,\quad (t,x)\in U,\ (t,y)\in U. \tag{5.4}$$

则对于U内任何(t_0,x_0)，(5.2)有唯一通过(t_0,x_0)的解 $x(t,t_0,x_0)$．在 R^{n+2} 内函数 $x(t,t_0,x_0)$的定义域E是开集，而 $x(t,t_0,x_0)$ 在E内连续．

证明 实际上与定理 3.1 的证明相同，细节留给读者去做．只需如定理 5.1 的证明中那样取$M(t)$，令 $K(t)=\int_{t_0}^{t} k_{B(\alpha,\beta)}(s)ds$，又选取 $\bar{\alpha}$，$\bar{\beta}$ 使得 $0<\bar{\alpha}\leqslant\alpha$，$0<\bar{\beta}\leqslant\beta$，且使 $t\in I_{\bar{\alpha}}$ 时 $|M(t)|\leqslant\bar{\beta}$，$|K(t)|<1$．

当 $A(t)$是 $n\times n$ 矩阵，$h(t)$是所有元素在每个有限区间上可积的 n 维向量，系统

$$\dot{x}=A(t)x+h(t) \tag{5.5}$$

满足 Carathéodory 条件与(5.4)．因此，它的初始值问题有唯一解．

I.6. 微分不等式

设 D_r 表示函数的右导数．如果 $\omega(t,u)$是纯量 t,u 在某个开连通集Ω内的纯量函数，我们说 $a\leqslant t\leqslant b$ 的函数 $v(t)$ 是微分不等式

$$D_r v(t)\leqslant\omega(t,v(t)) \tag{6.1}$$

在$[a,b)$上的解，如果 $v(t)$在$[a,b)$上连续，并且有在$[a,b)$上满足(6.1)的右导数.

引理 6.1. 如果 $x(t)$是 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续可微的 n 维向量函数，则 $D_r|x(t)|$存在于 $a\leqslant t<b$ 上，并且 $a\leqslant t<b$ 时$|D_r|x(t)||\leqslant|\dot{x}(t)|$.

证明 对于任意两个 n 维向量 x,u 与 $0<\theta\leqslant 1, h>0$，有

$$|x+\theta hu|-|\theta x+\theta hu|\leqslant(1-\theta)|x|.$$

因此

$$\frac{|x+\theta hu|-|x|}{\theta h}\leqslant\frac{|x+hu|-|x|}{h};$$

即差商

$$\frac{|x+hu|-|x|}{h}$$

是 h 的非减函数．而且这个差商有下界$-|u|$．所以，

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|x+hu|-|x|}{h}$$

存在.

如果 $x(t)$对 $a\leqslant t\leqslant b$ 连续可微，则上面这个关系式意味着

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|x(t)+h\dot{x}(t)|-|x(t)|}{h}$$

存在．由于当 $h\to 0^+$ 时

$$\begin{aligned}&|[|x(t+h)|-|x(t)|]-[|x(t)+h\dot{x}(t)|-|x(t)|]|\\&=|[|x(t+h)|-|x(t)+h\dot{x}(t)|]|\\&\leqslant|x(t+h)-x(t)-h\dot{x}(t)|=o(h),\end{aligned}$$

从而推知 $D_r|x(t)|$存在，而且

$$D_r|x(t)|=\lim_{h\to 0^+}\frac{|x(t)+h\dot{x}(t)|-|x(t)|}{h}.$$

显然，$|D_r|x(t)||\leqslant|\dot{x}(t)|$，引理就被证明了.

用同样的证明方法可以说明，如果 $x(t)$ 是绝对连续的 n 维向量函数，则在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上几乎处处 $D_r|x(t)|$ 存在，并且满足 $|D_r(|x(t)|)|\leqslant|\dot{x}(t)|$.

定理 6.1. 设 $\omega(t,u)$ 是在开连通集 $\Omega\subset R^2$ 上连续的函数，它使得纯量方程

$$\dot{u}=\omega(t,u) \tag{6.2}$$

的初始值问题有唯一解. 如果 $u(t)$ 是(6.2) 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的解，$v(t)$ 是(6.1)在 $a\leqslant t<b$ 上的解，且 $v(a)\leqslant u(a)$，则 $a\leqslant t\leqslant b$ 时 $v(t)\leqslant u(t)$.

证明 考虑方程族

$$\dot{u}=\omega(t,u)+\frac{1}{n}, \qquad n=1,2,\cdots, \tag{6.3}$$

我们现在用引理 3.1 到(6.3).

如果 $u_n(t)$ 是(6.3)满足 $u_n(a)=u(a)$ 的解，则引理 3.1 意味着存在 n_0，使得 $n\geqslant n_0$ 时 $u_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上定义，并且在 $[a,b]$ 上一致地有 $u_n(t)\to u(t)$. 我们来证明 $n\geqslant n_0, a\leqslant t\leqslant b$ 时 $v(t)\leqslant u_n(t)$. 如果不是这样，则在 (a,b) 内存在 $t_2<t_1$ 使得在 $t_2<t\leqslant t_1$ 上 $v(t)>u_n(t)$ 而 $v(t_2)=u_n(t_2)$. 因此 $t_2<t\leqslant t_1$ 时 $v(t)-v(t_2)>u_n(t)-u_n(t_2)$，它意味着

$$\begin{aligned}D_rv(t_2)\geqslant\dot{u}_n(t_2)&=\omega(t_2,u_n(t_2))+\frac{1}{n}\\&=\omega(t_2,v(t_2))+\frac{1}{n}>\omega(t_2,v(t_2)),\end{aligned}$$

这是一个矛盾，因而 $t\in[a,b], n\geqslant n_0$ 时 $v(t)\leqslant u_n(t)$. 由于在 $[a,b]$ 上 $u_n(t)$ 一致趋于 $u(t)$，这就证明了定理.

推论 6.1. $D_rv(t)\leqslant 0$ 在 $[a, b)$ 上的解在 $[a, b)$ 上是非增函数

推论 6.2. 假设 $\omega(t,u)$ 与 $u(t)$ 和定理 6.1 中相同. 如果 $x(t)$ 是在 $[a, b]$ 上有连续的一阶导数的连续的 n 维向量函数，使得

$|x(a)|\leqslant u(a)$，当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时 $(t,|x(t)|)\in\Omega$，并且

$$|\dot{x}(t)|\leqslant\omega(t,|x(t)|),\qquad a\leqslant t\leqslant b,$$

则在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有 $|x(t)|\leqslant u(t)$.

证明 直接从引理 6.1 与定理 6.1 推得.

推论 6.3. 假设 $\omega(t,u)$ 对于 $a\leqslant t<b$, $u\geqslant 0$ 满足定理 6.1 的条件，又设 $u(t)\geqslant 0$ 是(6.2)在 $a\leqslant t<b$ 上的解. 如果 $f:[a,b)\times R^n\to R^n$ 连续，并且

$$|f(t,x)|\leqslant\omega(t,|x|),\quad a\leqslant t<b,\quad x\in R^n,$$

则

$$\dot{x}=f(t,x),\quad |x(a)|\leqslant u(a)$$

的解存在于 $[a,b)$ 上，并且对 $[a,b)$ 内的 t 有 $|x(t)|\leqslant u(t)$.

证明 从推论 6.2 知只要 $x(t)$ 存在便有 $|x(t)|\leqslant u(t)$. 从定理 2.1 知仅当存在 $c(a<c<b)$ 使得 $x(t)$ 定义在 $[a,c)$ 上并且当 $t\to c-0$ 时 $\overline{\lim}|x(t)|=\infty$，解 $x(t)$ 才可能不在整个 $[a,b)$ 上存在. 另一方面，由于 $t\in[a,c)$ 时 $|x(t)|\leqslant u(t)$ 而且当 $t\to c-0$ 时 $\lim u(t)$ 存在，这是不可能的.

请注意推论 6.3 给出了在 $[a,b)$ 上解的存在性，以及解的上界.

推论 6.4. 假设 D 是 R^{n+1} 内的开连通集，$f: D\to R^n$ 连续，而且 $f(t,x)$ 对 x 局部地满足 Lipschitz 条件. 如果 K 是 D 内任意的紧集，而 L 是 f 在 K 内的 Lipschitz 常数，则只要(1.1)的解 $x(t,t_0,x_0)$, $x(t,t_0,x_1)$ 使得 $(t,x(t,t_0,x_0))$, $(t,x(t,t_0,x_1))$ 在 K 内，便有

$$|x(t,t_0,x_0)-x(t,t_0,x_1)|\leqslant e^{L(t-t_0)}|x_0-x_1|.$$

证明 如果 $z(t)=x(t,t_0,x_0)-x(t,t_0,x_1)$，则只要 $(t,x(t,t_0,x_0))$, $(t,x(t,t_0,x_1))$ 在 K 内 $|\dot{z}(t)|\leqslant L|z(t)|$ 便成立. 推论 6.2 便给出结果.

作为上述诸结果的第一个例证，我们证明一个关于整体存在性的结论．假设 $f:(\alpha,\infty)\times R^n\to R^n$ 连续，且

$$|f(t,x)|\leqslant\phi(t)\psi(|x|). \tag{6.4}$$

这里的 $\phi(t)\geqslant 0$ 对所有 $t>\alpha$ 连续，而 $\psi(u)$ 对 $u\geqslant 0$ 连续，对所有 $u>0$ 为正．假设 $t_0>\alpha$ 时 $u(t,\ t_0,\ u_0)$ 是 $\dot{u}=\phi(t)\psi(u)$，$u(t_0)=u_0>0$ 的解，并且对于任意 $u_0>0$ 此解唯一．如果

$$\int^{\infty}\frac{du}{\psi(u)}=+\infty, \tag{6.5}$$

则解 $u(t,\ t_0,u_0)$ 对所有 $t>\alpha$ 存在．事实上，u 满足方程

$$\int_{u_0}^{u}\frac{dv}{\psi(v)}=\int_{t_0}^{t}\phi(s)ds,$$

而如果 u 不是对所有 $t>\alpha$ 存在，则延拓定理意味着将存在 τ 与序列 $\{t_n\}$，当 $n\to\infty$ 时 $t_n\to\tau$，使得当 $n\to\infty$ 时 $u(t_n)\to\infty$．但这是不可能的，因为 $\int_{t_0}^{\tau}\phi(s)ds<\infty$ 而 $\int_{u_0}^{\infty}\frac{dv}{\psi(v)}=+\infty$．

对于 R^n 内任意给定的 $x_0\neq 0$ 选取 $u_0=|x_0|$，对于 $x_0=0$ 选取任意 $u_0>0$．从推论 6.3 推知 $\dot{x}=f(t,\ x)$ 的任何满足 $x(t_0,\ t_0,x_0)=x_0(t_0>\alpha)$ 的解 $x(t,\ t_0,x_0)$ 存在于 $[\alpha,\infty)$，并且只要 f 满足(6.4)与(6.5)，便有 $|x(t,\ t_0,x_0)|\leqslant u(t,\ t_0,u_0)$．

作为特例，假设 $f(t,x)=A(t)x+h(t)$，这里的 $A(t)$，$h(t)$ 对所有 t 值连续．则线性方程

$$\dot{x}=A(t)x+h(t) \tag{6.6}$$

的任何解存在于 $(-\infty,\infty)$ 上．事实上，

$$\begin{aligned}|A(t)x+h(t)|&\leqslant|A(t)||x|+|h(t)|\\&\leqslant\max\{|A(t)|,|h(t)|\}(|x|+1)\\&=\phi(t)\psi(|x|),\\&\quad\psi(u)=u+1.\end{aligned}$$

由于 $\phi(t)$连续，且$\int^{\infty}\frac{du}{\psi(u)}=+\infty$，我们便有所需的结果.

另一个有意思的特例是当对所有 $t\in(-\infty,\ \infty)$及$x\in R^n$ 有 $|f(t,x)|\leqslant K|x|$时. 由于 $\phi(t)=1$ 与 $\psi(u)=Ku$，故 $\dot{x}=f(t,x)$ 的所有解存在于$(-\infty,\infty)$.

为了今后参考，把部分结果总结为

定理 6.2. 如果 $f:(\alpha,\ \infty)\times R^n\to R^n$ 连续，满足(6.4)与(6.5)，而 $\dot{u}=\phi(t)\psi(u)$满足 $u(t_0)=u_0>0(t_0>\alpha)$的解在(α,∞)内存在而且唯一，则方程(1.1)的通过(t_0,x_0)的任意解存在于(α,∞)上. 特别，只要 $A(t)$，$h(t)$连续，则(6.6)的每个解存在于$(-\infty,\infty)$上.

作为另一个例证，我们证明关于稳定性的一个简单结果. 假设 $f:R^{n+1}\to R^n$，又存在$(-\infty,\infty)$上的连续函数 $\lambda(t)$使得$x\cdot f(t,x)\leqslant-\lambda(t)x\cdot x$，这里的"·"表示两个向量的纯量积. 注意这意味着 $f(t,0)=0$. 如果我们令$|x|^2=x\cdot x$，又假设 x 是 $\dot{x}=f(t,\ x)$ 在包含t_0的区间 I 上的解，则

$$\frac{d}{dt}|x|^2=\frac{d}{dt}(x\cdot x)=2x\cdot f(t,x)\leqslant-2\lambda(t)|x|^2.$$

如果 $\omega(t,u)=-2\lambda(t)u$，而 u 是 $\dot{u}=\omega(t,\ u)$满足 $u(t_0)=|x(t_0)|$ 的解，则 $u(t)=\{\exp(-2\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds)\}|x(t_0)|$对于$(-\infty,\ \infty)$内所有 t 存在. 因此，由推论 6.2 与延拓定理推知解 $x(t)$ 不但在 I 上而且对$(-\infty,\infty)$内所有 t 存在，并且

$$|x(t)|\leqslant\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right)|x(t_0)|,\quad t\geqslant t_0.$$

如果 $\lambda(t)\geqslant0$，则 $\dot{x}=f(t,x)$的解 $x=0$ 稳定，实际上还是一致稳定的. 如果 $\lambda(t)\geqslant0$ 而且$\int_{t_0}^{\infty}\lambda(s)ds=+\infty$，则解 $x=0$ 渐近稳定.

习题 6.1. 如果 $\lambda(t)\leqslant 0$ 又对所有 t_0 有 $\int_{t_0}^{\infty}\lambda(s)ds=+\infty$，前面讨论的解 $x=0$ 是否一致渐近稳定？讨论 $\lambda(t)$ 变号的情况.

习题 6.2. 假设 $f:R^{n+1}\to R^n$ 连续，又存在正定矩阵 B 使得 $x\cdot Bf(t,x)\leqslant-\lambda(t)x\cdot x$ 对所有 t，x 成立，这里的 $\lambda(t)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 内 t 的连续函数. 证明方程 $\dot{x}=f(t,x)$ 满足 $x(t_0)=x_0$ 的任何解存在于 $[t_0,\infty)$ 上，并且给出稳定与渐近稳定的充分条件. 提示：求 $V(x)=x\cdot Bx$ 沿着解的导数，又利用存在正的常数 μ 使得 $x\cdot Bx\geqslant\mu x\cdot x$ 对所有 x 成立的事实.

习题 6.3. 考虑方程 $\dot{x}=f(t,x)$，这里对所有 t,x 有 $|f(t,x)|\leqslant\phi(t)|x|$，$\int^{\infty}\phi(t)dt<\infty$.

(a) 证明当 $t\to\infty$ 时每个解趋于常数.

(b) 如果还有对一切 x,y 而言，

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant\phi(t)|x-y|,$$

证明在解的初始值与极限值之间存在一一对应. 提示：取初始时刻充分大以得到需要的对应.

(c) 上述结论对于方程

$$\dot{x}=-x+a(t)x,\quad \int^{\infty}|a(t)|dt<\infty$$

意味着什么？提示：考虑变换 $x=e^{-t}y$.

(d) 对于 x_1,x_2 为纯量的系统

$$\dot{x}_1=x_2,$$

$$\dot{x}_2=-x_1+a(t)x_1,\qquad \int^{\infty}|a(t)|dt<\infty$$

又意味着什么？

习题 6.4. 考虑初始值问题

$$\ddot{z}+\alpha(z,\dot{z})\dot{z}+\beta(z)=u(t),\quad z(0)=\xi,\quad \dot{z}(0)=\eta,$$

这里的$\alpha(z,w)$,$\beta(z)$与它们的一阶偏导数在$-\infty<z<\infty$,$-\infty<w<\infty$上连续与有界，$\alpha\geqslant 0$，$z\beta(z)\geqslant 0$. 说明这个问题有且仅有一个解，并且这个解可在$[0,\infty)$上定义. 提示：令$z=x$，$\dot{z}=y$，可把方程改写为系统，定义$V(x,y)=\frac{y^2}{2}+\int_0^x\beta(s)ds$，研究$V(x(t),y(t))$沿着此二维系统的解的变化率.

推论 6.5. 设$\omega(t,u)$满足定理 6.1 的条件，而且对u是非降的. 如果$u(t)$是定理 6.1 中的函数，而$v(t)$连续，且满足

$$v(t)\leqslant v_a+\int_a^t\omega(s,v(s))ds,\quad a\leqslant t\leqslant b,\quad v_a\leqslant u(a),\qquad(6.7)$$

则$a\leqslant t\leqslant b$时$v(t)\leqslant u(t)$.

证明 令$V(t)$记(6.7)的右边，则$v(t)\leqslant V(t)$. 又$\dot{V}(t)=\omega(t,v(t))\leqslant\omega(t,V(t))$，$V(a)=v_a\leqslant u(a)$. 于是由定理 6.1 推知$a\leqslant t\leqslant b$时$V(t)\leqslant u(t)$，这证明了推论.

推论 6.6. (Gronwall 不等式). 如果α是实的常数，$\beta(t)\geqslant 0$，而$\phi(t)$是$a\leqslant t\leqslant b$的连续实函数，满足

$$\phi(t)\leqslant\alpha+\int_a^t\beta(s)\phi(s)ds,\qquad a\leqslant t\leqslant b,$$

则

$$\phi(t)\leqslant\left(\exp\int_a^t\beta(s)ds\right)\alpha,\qquad a\leqslant t\leqslant b.$$

证明 令$v_a=\alpha$，$\omega(t,u)=\beta(t)u$，利用推论 6.5. 则$\dot{u}=\beta(t)u$，$u(a)=\alpha$的解是$u(t)=\left(\exp\int_a^t\beta(s)ds\right)\alpha$，这就证明了推论.

实际上，Gronwall 不等式容易用别的方法证明. 在以后的应用中，我们实际上要用这个不等式的一个推广，所以我们叙述并且不用定理 6.1 而证明它.

引理 6.2. (推广的 Gronwall 不等式). 如果$a\leqslant t\leqslant b$时，

ϕ,α 是实值连续函数，$\beta(t)\geqslant 0$ 是$[a,b]$上的可积函数，而

$$\phi(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\phi(s)ds,\qquad a\leqslant t\leqslant b.$$

则

$$\phi(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)\alpha(s)\left(\exp\left(\int_s^t\beta(u)du\right)\right)ds,$$

$$a\leqslant t\leqslant b.$$

证明 令 $R(t)=\int_a^t\beta(s)\phi(s)ds$. 则除开一个测度为零的集合，有

$$\frac{dR}{dt}=\beta(t)\phi(t)\leqslant\beta(t)\alpha(t)+\beta(t)R(t).$$

于是，除开一个测度为零的集合，有

$$\frac{dR}{dt}-\beta(t)R(t)\leqslant\beta(t)\alpha(t),$$

$$\frac{d}{ds}\left(\exp\left(-\int_a^s\beta(u)du\right)R(s)\right)$$

$$\leqslant\left(\exp\left(-\int_a^s\beta(u)du\right)\right)\beta(s)\alpha(s).$$

从 a 到 t 积分，得到

$$\left(\exp\int_a^t-\beta(u)du\right)R(t)\leqslant\int_a^t\left(\exp\left(-\int_a^s\beta(u)du\right)\right)\beta(s)\alpha(s)ds.$$

于是

$$R(t)\leqslant\int_a^t\left(\exp\int_s^t\beta(u)du\right)\beta(s)\alpha(s)ds.$$

这个估计式证明了引理.

为了说明从 Gronwall 不等式得到的估计是这个估计的特殊情形，只需注意当 α 等于一个常数时，通过积分可把引理 6.2 中的估计化到 Gronwall 不等式中的估计.

I.7. 自治系统——概论

假设 $x(t)$ 是(1.1)的定义在区间 (a,b) 上的解，在前面我们引进了此解的轨线(trajectory)的概念，它是 R^{n+1} 内由

$$\bigcup_{a\leq t\leq b}(t,x(t))$$

定义的集合．一条轨线在(1.1)的因变量空间 R^n 内的射影，是它的轨迹(path)或轨道(orbit)．因变量空间通常叫作状态空间或相空间．对于纯量 x 的 n 阶方程，相坐标是向量 $(x,x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n-1)})$．如果向量场即 (1.1) 中的函数不依赖于 t，系统(1.1)便称为自治的．这一节我们考虑自治系统的某些一般性质；也就是说，考虑微分系统

$$\dot{x}=f(x), \tag{7.1}$$

这里的 $f:\Omega\to R^n$ 连续，Ω 是 R^n 内的一个开集．自治系统的基本性质如下：如果 $x(t)$ 是(7.1)在区间 (a,b) 上的一个解，则对于任意实数 τ，函数 $x(t-\tau)$ 是(7.1)在区间 $(a+\tau,b+\tau)$ 上的解．这是显然的，因为这个微分方程通过自变量的平移保持不变．于是，从(7.1)的一个解出发可以定义解的单参数族．

从现在起，我们假定对于 Ω 内任意的 p，(7.1)有唯一的在 $t=0$ 通过 p 的解 $\phi(t,p)$．函数 $\phi(t,p)$ 定义在开集 $\Sigma\subset R^{n+1}$ 上，满足：

(i) $\phi(0,p)=p$;

(ii) $\phi(t,p)$ 在 Σ 内连续；

(iii) 在 Σ 上，$\phi(t+\tau,p)=\phi(t,\phi(\tau,p))$．

事实上，从定理 3.4 推知 $\phi(t,p)$ 连续．关系式(iii)成立，乃是因为两个函数都满足方程，在 $t=0$ 时相等，而我们已经假定唯一性成立．

根据上面的定义，通过固定的 $p\in\Omega$ 的轨迹或轨道 $\gamma=\gamma(p)$

是 R^n 内由 $\gamma(p)=\{x\in R^n$:存在$(t,\ \phi)\in\Sigma$ 使得 $\phi(t,\ p)=x\}$ 所定义的集合. 显然 $\phi(t,p)$ 与 $\phi(t+\tau,p)$ 是同一轨道 $\gamma(p)$ 的不同参数化形式.

通过Ω内给定的 p 有唯一轨道 γ　实际上，通过 p 的轨道是(7.1)的通过直线$(\tau,\ p)$，$-\infty<\tau<\infty$上任意点的解的射影，但是,$\phi(t+\tau,p)$是(7.1)通过(τ,p) 的唯一解,而我们已在上面看到这些函数是同一曲线的所有参数化形式. 注意这最后的结论即意味着没有两条轨道能够相交.

n 维向量场 $f(x)$的平衡点或临界点或奇点是使 $f(p)=0$ 的点 p. 如果 p 是临界点,则 $x(t)=p$, $-\infty<t<\infty$满足(7.1). 临界点 p 的轨线是 R^{n+1} 内由 $x=p$, $-\infty<t<\infty$给出的直线，而临界点的轨道是点本身. 不是临界点的点称为正则点.

如果 p 是(7.1)的一个临界点，则除开 $x(t)=p$, 没有轨线能够通过延拓过程到达直线 $x=p$, $-\infty<t<\infty$, 否则就将违反唯一性,这意味着: 如果 p 是临界点而 $x(t)\neq p$ 却趋于 p, 则 $t\to+\infty$ 或者 $t\to-\infty$.

R^n内的一条曲线 λ 是由区间 $I\subset R$入R^n的连续映射的值域. 如果相应的映射可微, 便说此曲线可微. 给定连续映射 $f:\Omega\to R^n$, 其中Ω是 R^n 内的一个开集, $f=(f_1,\cdots,f_n)$, 我们说曲线 λ 是方程

$$\frac{dx_1}{f_1(x)}=\frac{dx_2}{f_2(x)}=\cdots=\frac{dx_n}{f_n(x)} \tag{7.2}$$

的解，如果 λ 可微而且沿着 λ 的微分 dx 当 $f(x)\neq0$ 时平行于 $f(x)$, 又如果 $f(x)=0$, λ 是一个点.

引理 7.1.　(7.2) 在Ω内任意点 p 的解是(7.1) 通过 p 的轨道.

证明　如果 $p=(p_1,\cdots,\ p_n)$是一个临界点，则 γ 与 λ 都是 p. 如果 p 不是临界点, 则 f 至少有一个分量, 比方说是 f_1, $f_1(p)\neq0$.

因此，对于 p 的邻域 U 内的 x，$f_1(x)\neq 0$，在 U 内，(7.2) 等价于常微分系统

$$\frac{dx_\alpha}{dx_1}=\frac{f_\alpha(x)}{f_1(x)},\quad x_\alpha(p_1)=p_\alpha,\quad \alpha=2,3,\cdots,n,$$

从存在性定理 1.1 知，这些方程有解 $x_\alpha(x_1)$，存在于 $|x_1-p_1|$ 充分小处. 我们按下述方法来把 λ 参数化，考虑纯量自治方程

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(x_1,x_2(x_1),\cdots,x_n(x_1)).$$

这个方程有满足 $x_1(0)=p_1$ 的解 $x_1(t)$，它当 $|t|$ 甚小时存在. 现在容易说明 $x_1(t), x_\alpha(x_1(t)), \alpha=2,\cdots,n$ 是 (7.1) 的解. 由于 (7.1) 通过 Ω 的任意点的轨道是 (7.2) 的解，这证明了 $\lambda=\gamma$ 与引理.

一条闭或开的线段的同胚像称为弧. 圆周的同胚像称为 Jordan 曲线. 如果轨道 γ 是 Jordan 曲线，就称为闭轨道.

引理 7.2. (7.1) 的轨道是闭的必要充分条件是它对应着 (7.1) 的非常数的周期解.

证明 如果 γ 是 (7.1) 的闭轨道，而 p 是 γ 的点，存在 $\tau\neq 0$ 使得 $\phi(\tau,p)=\phi(0,p)=p$. 根据解的唯一性，$\phi(t+\tau,p)=\phi(t,p)$ 对所有 t 成立，这说明 $\phi(t,p)$ 有周期 τ. 反之，假设 $\phi(t,p)=\phi(t+\tau,p)$ 对所有 t 成立，又 $\phi(t,p)$ 不是常数，而 τ 是 $\phi(t,p)$ 的最小周期；也就是 $0<t<\tau$ 时 $p\neq\phi(t,p)$. 当 t 在 $[0,\tau)$ 内变化时，$\phi(t,p)$ 描画出 R^n 内与线段 $[0,\tau)$ 同胚的曲线，$\phi(0,p)=\phi(\tau,p)$. 另一方面 0 与 τ 相重的线段 $[0,\tau]$ 与单位圆同胚，这就完成了证明.

习题 7.1 假设自治方程 $\dot{x}=f(x)$ 有非常数的周期解 $x^0(t)$. 试定义此解的稳定性. 这种稳定性能够是渐近的吗？在这种情况下，最强的稳定性是什么？

现在举出少数例子说明上面的概念.

例 7.1. 如果 x 是实的纯量，$\dot{x}=x$，则 $\phi(t,p)=e^tp$，通过 p 的轨线是集合 $\{(t,e^tp),\ -\infty<t<\infty\}$，通过 p 的轨道当 $p>0$ 时是集合 $\{x>0\}$，当 $p=0$ 时是集合 $\{x=0\}$，当 $p<0$ 时是集合 $\{x<0\}$. 请见图 7.1，其中在相空间曲线上的箭头表示随着时间增加所指出的轨迹方向.

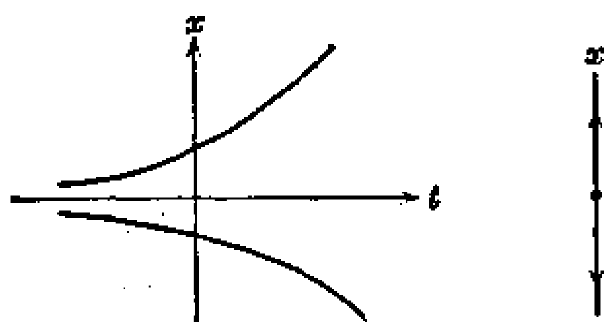


图 I.7.1

例7.2. 如果 x 是实的纯量，$\dot{x}=-x(1-x)$，则 $\phi(t,p)=pe^{-t}/[1-p+pe^{-t}]$. 轨道是集合 $\{x>1\}$，$\{x=1\}$，$\{0<x<1\}$，$\{x=0\}$，$\{x<0\}$. 请见图 7.2. 平衡点 $x=1$ 不稳定，而 $x=0$ 渐近稳定.

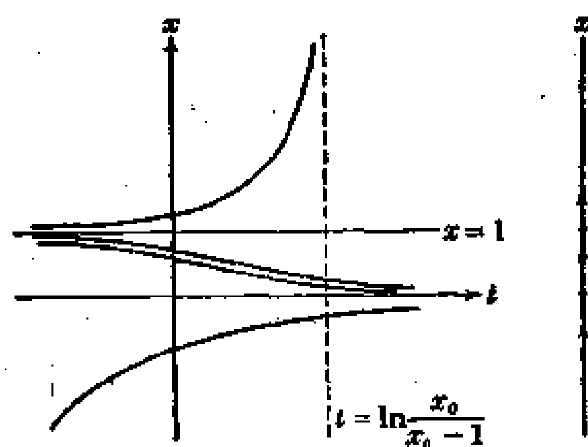


图 I.7.2

例 7.3. 如果 y 是实纯量，则方程 $\ddot{y}+y=0$ 等价于系统 $\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=-x$，其中 $x_1=y$. 相空间是 R^2. 对于任意实常数 a,b，可验证 $\phi_1(t)=a\sin(t+b),\phi_2(t)=a\cos(t+b)$ 是此系统的解，而

方程的任意解能写成这种形式. 任何轨线落在圆柱面上, 通过任意点的轨道是通过此点的以原点为中心的圆,请见图 7.3. 二维自治系统的平衡点,如果在每个邻域内包含闭曲线轨道(相应于周期解),就称为中心. 因此,这个例的解 $x_1=x_2=0$ 是一个中心.

在这个例子中,我们不需要积分此方程,便能求得相空间内轨道的参数表示式. 事实上,引理 7.1 意味着轨道是纯量方程

$$\frac{dx_1}{dx_2}=-\frac{x_2}{x_1}$$

的解, 而这方程有解 $x_1^2+x_2^2=$ 常数, 此常数自然是由初始值确定的. 当时间增加时描出轨道的方式,容易从原来的方程得到.

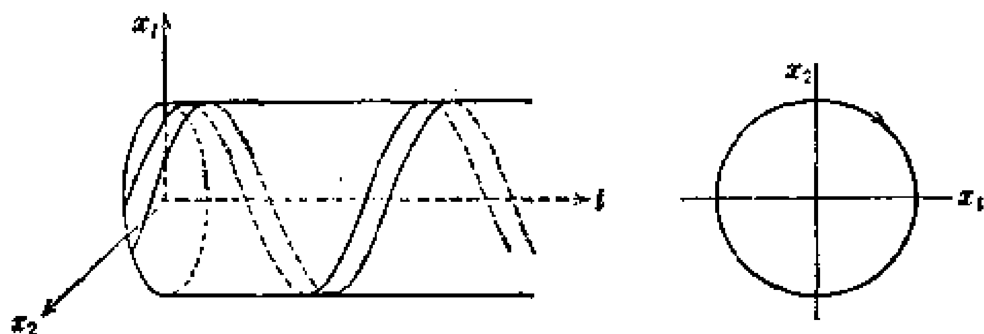


图 I.7.3

例 7.4. 假设 $\varepsilon>0$ 已给定,x_1,x_2 是实纯量,$r^2=x_1^2+x_2^2$. 考虑方程

$$\dot{x}_1=-x_2+\varepsilon x_1(1-r^2),$$
$$\dot{x}_2=x_1+\varepsilon x_2(1-r^2).$$

这个系统的相空间是 R^2. 如果令 $x_1=r\cos\theta, x_2=r\sin\theta$, 则此系统等价于系统

$$\dot{\theta}=1,$$
$$\dot{r}=\varepsilon r(1-r^2).$$

容易验证轨线与轨道如图 7.4 所示. 在这个情况下, 轨道是半径为 1 的圆,在此圆内外两侧的螺线以及平衡点(0, 0). 平衡点(0, 0)称为焦点; 也就是在其邻域内的解当 $t\to+\infty$(或$-\infty$) 时螺旋式

地趋于0. 所谓一个解当 $t\to+\infty$(或$-\infty$) 时螺旋式地趋于0,乃是指由零引出的任意射线穿过解的轨道无穷多次,并且当$t\to+\infty$(或$-\infty$)时此解趋于零. 轨道 $r=1$ 是闭曲线,我们称之为一个极限环,起这个名字的理由在往后的讨论中将明白起来.

注意,当 $\epsilon=0$ 时这个例子与例 7.3 相同. 然而,对于任意$\epsilon>0$, 不管它多么小,这两个方程的相图却是完全不同的.

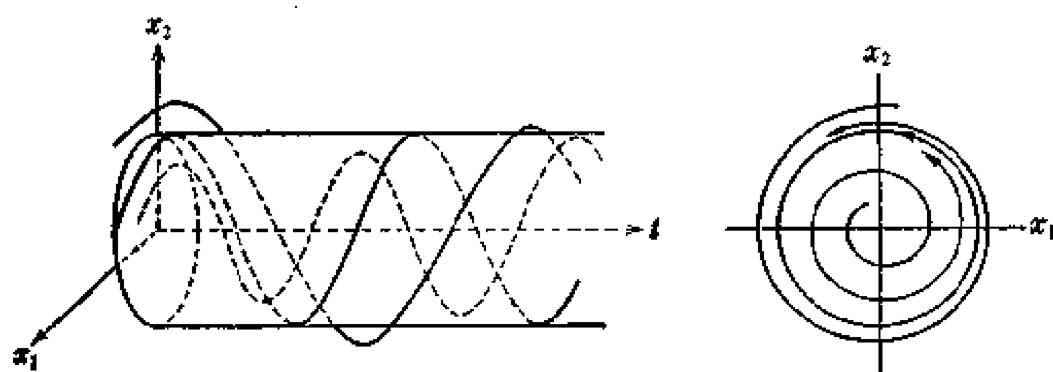


图 I.7.4

例 7.5. 在这个例子里,我们要说明微分方程的解可能比前面的例子还复杂些. 两个圆周的交叉乘积的同胚像称为环面. 假设 θ,ϕ 是如图 7.5 所示的描写环面上坐标系统的角. 如果 θ, ϕ满足微分方程 $\dot{\theta}=1,\dot{\phi}=\omega$, 这里$\omega$是常数, 则对应于 $r=1$ 的轨道 γ 的解在环面上按周期 $2\pi/\omega$ 通过角 ϕ, 按周期 2π 通过角 θ. 因此,当ω是无理数时, 轨线不是闭的, 但是γ的闭包确实是整个环面 $r=1$!

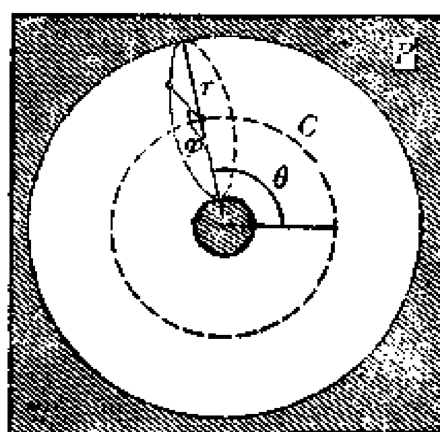


图 I.7.5

习题 7.2. 证明例 7.5 中所说的结论: 当ω是无理数时在 $r=1$ 上γ的闭包是 $r=1$ 本身, 你能叙述当ω是有理数时的特性吗?

例 7.6. 在这个例子里, 我们说明在 R^3 内例 7.5 的复杂特性

是环体内的微分方程的所有解所共有的．所谓环体，是圆与圆盘的交叉乘积的同胚像．假设区域是图 7.5 所画出的，而在坐标系 (r,θ,ϕ) 中 $0\leqslant r\leqslant 2, 0\leqslant\theta,\phi\leqslant 2\pi$．$r=0$ 是落在平面 P 内的圆 C，而曲面 $r=$ 常数，$0\leqslant\theta,\phi\leqslant 2\pi$ 是环面，C 在它的中心位置上．

考虑微分方程

$$\dot{\theta}=1,$$
$$\dot{\phi}=\omega,$$
$$\dot{r}=r(1-r),$$

这里的 ω 是常数．环面 $r=0$ 与 $r=1$ 按照下述意义是不变的，即初始值取在这些曲面上的任何解，对于 $(-\infty,\infty)$ 内所有的 t，都留在这些曲面上．除开 C 对应着周期解，其它解都趋于环面 $r=1$．因此，与例 7.5 相似，当 ω 是无理数时，C 以外的所有轨道的闭包都包含环面 $r=1$．

习题 7.3．讨论二阶方程

$$\dot{x}_1=x_2(x_2^2-x_1^2),$$
$$\dot{x}_2=-x_1(x_2^2-x_1^2).$$

的解的相图．什么是轨道与平衡点？哪些平衡点是稳定的？对于这个系统，利用引理7.1能得到什么结论？

假设 $\psi: S_\alpha\to R^n$ 是在球 $S_\alpha=\{u\in R^{n-1}:|u|<\alpha\}$ 上的连续可微函数，$\psi(0)=p$，又对于 S_α 内所有的 u，$[\partial\psi(u)/\partial u]$ 的秩 $=n-1$．集合 $\{x\in R^n: x=\psi(u), u\in S_\alpha\}$ 称为通过 p 的 $n-1$ 维胞腔，记作 E_p^{n-1}．如果对于每个 $p'\in E_p^{n-1}$，通过点 p' 的轨道 $\gamma_{p'}$ 在 p' 不与 E_p^{n-1} 相切，这样的 E_p^{n-1} 叫作(7.1)的轨道 γ_p 在 p 的横截痕．这个定义等价于说，对于 $|u|<\alpha$，在点 γ' 沿着 $\gamma_{p'}$ 的 dx 不是 $\partial\psi(u)/\partial u$ 诸列的线性组合．而这又等价于说，当 $|u|<\alpha$ 时

$$D(x,u)\overset{\text{def}}{=\!=}\det\left[\frac{\partial\psi(u)}{\partial u}, f(x)\right]\neq 0.$$

假设 $D(p,0)\neq 0$. 由于 $D(x,u)$ 连续，存在充分小的 α，使得当 $|x-p|<\alpha$, $|u|<\alpha$ 时 $D(x,u)\neq 0$. 对于这个 α, E_p^{n-1} 是 γ_p 在 p 的横截痕. 如果 p 是(7.1)的一个正则点，总有 γ 在 p 的一个横截痕 E_p^{n-1}. 利用半径为 α 的闭球，同样可以定义在 p 穿过 γ 的闭横截痕.

(7.1)的开轨柱是这样的集合，它同胚于开柱(R^n 内的开球与开区间的交叉乘积)，并且仅由(7.1)的轨迹弧组成. (7.1)的闭轨柱是这样的集合，它同胚于闭柱，且只由(7.1)的轨迹弧组成. 闭轨柱的底是闭柱的底的同胚象. 如果 C 是轨柱(开或闭)，(7.1)的落在 C 内的轨迹弧称为 C 的母线.

引理 7.3. 假设 f 在 Ω 内有连续的一阶偏导数，如果 p 是(7.1)的正则点，而 E^{n-1} 是 (7.1) 的过 p 的轨迹 γ 在 p 的可微的 $n-1$ 维胞腔横截痕，则存在包含点 p 在内部的轨柱 C. 特别地，(7.1)的每条有一个点在 C 内的轨迹 γ' 必在某点 p' 穿过 E^{n-1}，这个 E^{n-1} 是 γ' 在 p' 的横截痕.

证明 设 E^{n-1} 有参数表示式 $E^{n-1}=\{x\in R^n: x=\psi(u), u\in S_\alpha\}$，其中 $S_\alpha=\{u\in R^{n-1}: |u|<\alpha\}$，$\psi$ 有连续的一阶导数. 设 $\phi(t,p')$ 是(7.1)满足 $\phi(0,p')=p'$ 的解，它描出通过 p' 的轨道 γ'. 存在包含零在内部的区间 I，使得对于每一个 $p'\in E^{n-1}$, $\phi(t,p')$ 都在 $t\in I$ 时有定义. 函数 $\phi(t,p')=\phi(t,\psi(u))$ 因此可以看作由 $I\times S_\alpha$ 入 R^n 的映射. 根据定理 3.3，这个映射在 $I\times S_\alpha$ 内连续可微. 如果我们对 $x\in R^n$, $(t,u)\in I\times S_\alpha$，定义

$$F(x,t,u)=-x+\psi(u)+\int_0^t f(\phi(s,\psi(u)))ds,$$

则由 $\phi(t,\psi(u))$ 是(7.1)的解推知 $(t,u)\in I\times S_\alpha$ 时 $F(\phi(t,\psi(u)),t,u)=0$. 现在我们把 $F(x,t,u)=0$ 当作定义 t,u 为 x 的隐函数的关系式. 由于 $(x,t,u)=(p,0,0)$ 时

$$\det\left[\frac{\partial F(x,t,u)}{\partial(t,u)}\right]$$

等于 $D(p,0)$，这个行列式在$(p,0,0)$的邻域内必异于零．由隐函数定理推知在 p 的邻域内 T 的逆映射存在，并且它连续可微．这说明存在 $\alpha>0$ 与 $\tau>0$，使得映射 T 是由 $I_\tau\times S_\alpha(I_\tau=\{t:|t|<\tau\})$ 入 p 的一个邻域的连续可微的同胚(或微分同胚)，并且 $\{T(t,u),t\in I_\tau\}$ 与由解 $\phi(t,p')$ 在 $-\tau<t<\tau$ 内描出的 γ' 的弧重合．T 的值域是开轨柱．显然闭轨柱也是存在的．这就证明了引理．

现在我们把这个局部性结果引伸为下述意义下的整体结果，即描出轨道所涉及的时间区间任意地大但仍有限．首先证明一个关于非闭轨道的结果，比较确切地说，我们证明

引理 7.4. 假设 f 在 Ω 内有连续的一阶偏导数，γ 是任意的轨道，p 是正则点，pq 是 γ 的弧，E_p^{n-1} 与 E_q^{n-1} 分别是 γ 在 p 与 q 的可微的 $n-1$ 维胞腔横截痕．则存在着轴为 pq 而底在 E_p^{n-1}、E_q^{n-1} 内的闭轨柱．

证明 我们可以假定$E_p^{n-1}\cap E_q^{n-1}$ 是空集．相应于 E_p^{n-1}与E_q^{n-1}，我们可以作出局部开轨柱 C_p 与 C_q．令 t_p 为沿着轨道 γ 由 p 到 q 的时间；即 $\phi(t_p,p)=q$．根据对于初始数据的连续性，能够选取一个 E_p^{n-1} 内的 $n-1$ 维开胞腔 $\bar{E}_p^{n-1}$，使得对于每一个 $p'\in\bar{E}_p^{n-1}$，$\phi(t_p,p')$属于 C_q．

引理 7.3 意味着每个点 $\phi(t_p,p')$必然落在(7.1)的一条轨线在 C_q 内的一段弧上，而且必定在某点 q' 穿过 E_q^{n-1}．设沿着弧 $\gamma_{p'}$ 从 p' 到 q' 的时间是 $t_{p'}$．映射 $p'\to\phi(t_{p'},p')$是同胚，由于(7.1)内的 f 在 C_q 与 C_p 上有界，故存在 $\nu>0$，使得沿着通过 $p'\in E_p^{n-1}$ 的轨道弧离开 C_p 的时间与沿着通过 $q'\in E_q^{n-1}$ 的轨道弧离开 C_q 的时间都大于 ν．今选取 $\nu<t_p$．

让我们指出，如果$\bar{E}_p^{n-1}$ 的直径充分小，$p'q'$ 就是闭弧．如果$p'q'$ 不是一段弧，则 $\gamma_{p'}$ 必然是闭曲线．于是存在 $\tau_{p'}$，$\nu<\tau_{p'}<t_{p'}-\nu$，使得 $\phi(\tau_{p'},p')=p'$．如果没有这样的 $\bar{E}_p^{n-1}$ 以致 $p'q'$ 是弧，则存在

一序列 $p'_k \in \bar{E}_p^{n-1}$ 与 $\tau_{p'_k}$, $0<\tau_{p'_k}<t_{p'_k}-\nu$, 当 $k\to\infty$ 时 $p'_k\to p$, 使得 $\phi(\tau_{p'_k}, p'_k)=p'_k$. 由于 $k\to\infty$ 时 $t_{p'_k}\to t_p$ 与 $\nu<\tau_{p'_k}<t_{p'_k}-\nu$, 故 $\tau_{p'_k}$ 必有界. 因此, 有一个子序列(我们仍用前面的记号) 使得 $k\to\infty$ 时 $\tau_{p'_k}\to\tau_0$ 且 $0<\tau_0<t_p-\nu/2$, 但是这显然意味着由 $\phi(t,p)$描出的轨道满足 $\phi(\tau_0, p)=p$. 这和假定 pq 是弧相矛盾.

轨柱C作为轨线弧 $p'q'$ 的并集得到, 其中 p' 在 $\bar{E}_p^{n-1}$ 内取得, 留下来仅需证明C同胚于闭柱, 对于 $I=[0, 1]$, 由 $G(p', s)=\phi(st_{p'}, p')$定义映射 G: $\bar{E}_p^{n-1}\times I\to R^n$, 这里的 t'_p 定义如上, 显然这个映射是同胚, 因此C是一个闭轨柱. 引理就证明了.

围绕 γ 的轨迹环是同胚于环体的, 仅由(7.1) 的轨迹组成的集合.

引理 7.5. 如果 γ 是闭轨迹, 则有围绕 γ 的轨迹环.

证明 引理 7.2 表明 γ 是闭轨道等价于(7.1)有非常数的周期解; 即存在最小的 $\bar{t}>0$ 使得 $\phi(\bar{t}, p)=p$. 分区间$[0, \bar{t}]$为两个相等的部分, 又令 $p_i=\phi(i\bar{t}/2, p)$, $i=0,1,2$. 在 p_i 取定横截痕 E_i^{n-1}, 则 $E_0^{n-1}=E_2^{n-1}$. 对于 γ 的每段弧 p_ip_{i+1}, 我们可以作出底为 $\bar{E}_i^{n-1}$ 与 $\bar{E}_{i+1}^{n-1}$ 的闭轨柱 C_i, 这些底相应为 γ 在 p_i, p_{i+1} 的横截痕, $\bar{E}_2^{n-1}=\bar{E}_0^{n-1}$. 相应于 C_i 内的轨道, 令 T_i: $\bar{E}_i^{n-1}\to\bar{E}_{i+1}^{n-1}$, $(i=0,1)$是把$\bar{E}_i^{n-1}$内的 p' 映入通过 p' 的轨道与 $\bar{E}_{i+1}^{n-1}$ 的支集的映射. 把E_0^{n-1}的直径选得充分小, 可以相信在 E_0^{n-1} 内有一个闭的 $n-1$ 维胞腔 Γ, 以致复合映射 $T=T_2\circ T_1$ 是由 $\Gamma\subset E_0^{n-1}$ 入 $\bar{E}_0^{n-1}$ 内闭 $n-1$ 维胞腔的同胚. 轨道 $p'Tp'$ 的和集便是要求的轨迹环. 这证明了引理.

$\dot{x}=x^2$ 的例子表明自治方程的解可以不是对R内所有 t 有定义. 在应用中, 人们经常仅对研究在某个有界集G内的解的特性感兴趣, 而反复地说解的定义域又很麻烦. 我们可以这样来避免这种情况, 用一个所有的解定义在$(-\infty, \infty)$上但在G的内侧由解

所决定的轨迹与原方程的轨迹相同的方程来代替原微分方程. 当两个自治微分方程的轨迹在一个集合 G 上重合时，我们说这两个微分方程在 G 上等价.

引理 7.6. 如果(7.1)内的 f 定义在 R^n 上，而 $G\subset R^n$ 是有界的开集，则存在函数 $g:R^n\to R^n$，使得在 G 上 $\dot{x}=g(x)$ 等价于(7.1)，而它的解定义在 $(-\infty,\infty)$ 上.

证明 如果 $f=(f_1,\cdots,f_n)$，不失一般性，我们可以假定 $G\subset\{x:|f_j(x)|\leqslant 1,j=1,2,\cdots,n\}$. 定义 $g=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$，其中 $g_j=f_j\phi_j$，

$$\phi_j(x)=\begin{cases}1, & \text{如果}\ |f_j(x)|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{f_j(x)}, & \text{如果}\ f_j(x)>1,\\ -\dfrac{1}{f_j(x)}, & \text{如果}\ f_j(x)<-1.\end{cases}$$

由于 $|g(x)|$ 在 R^n 内有界，推论 6.3 意味着 g 满足本引理的条件.

I. 8. 自治系统——极限集，不变集

这一节我们考虑系统(7.1)，同时假设 f 在 R^n 上满足足够的条件，以保证解 $\phi(t,p)$ $(\phi(0,p)=p)$ 对 R 内所有 t 与 R^n 内所有 p 有定义，并且满足罗列在 I. 7 节开始处的条件(i)—(iii).

(7.1)的通过 p 的轨道 $\gamma(p)$ 被定义为 $\gamma(p)=\{x:x=\phi(t,p),-\infty<t<\infty\}$. 如果 q 属于 $\gamma(p)$，则如早先提到过的，$\gamma(p)=\gamma(q)$. 通过 p 的正半轨是 $\gamma^+(p)=\{x:x=\phi(t,p),t\geqslant 0\}$，负半轨是 $\gamma^-(p)=\{x:x=\phi(t,p),\ t\leqslant 0\}$. 如果我们不想辨别轨道上的特殊点，将分别用 γ,γ^+,γ^- 来记轨道，正半轨，负半轨.

(7.1)的正极限集（或 ω 极限集）的元素是当时间增加时沿着 γ 趋近的 R^n 内的点集. 比较确切地说，点 q 属于轨道 γ 的 ω 极限

集或正极限集 $\omega(\gamma)$，如果存在实数序列 $\{t_k\}$，当 $k\to\infty$ 时 $t_k\to\infty$，使得 $k\to\infty$ 时 $\phi(t_k,p)\to q$. 相似地，点 q 属于 α 极限集或负极限集 $\alpha(\gamma)$，如果存在实数序列 $\{t_k\}$，当 $k\to\infty$ 时 $t_k\to-\infty$，使得 $k\to\infty$ 时 $\phi(t_k,p)\to q$.

容易证明 ω 极限集与 α 极限集的等价定义分别是

$$\omega(\gamma)=\bigcap_{p\in\gamma}\overline{\gamma^+(p)}=\bigcap_{\tau\in(-\infty,\infty)}\overline{\bigcup_{t\geq\tau}\phi(t,p)}$$

$$\alpha(\gamma)=\bigcap_{p\in\gamma}\overline{\gamma^-(p)}=\bigcap_{\tau\in(-\infty,\infty)}\overline{\bigcup_{t\leq\tau}\phi(t,p)}$$

这里的一横表示包.

R^n 内的集合 M 称为(7.1)的不变集，如果对于 M 内任何 p，(7.1)的通过 p 的解 $\phi(t,p)$ 当 t 在 $(-\infty,\infty)$ 时都属于 M. (7.1)的任何轨道显然是(7.1)的不变集. 集合 M 称为正(负)不变集，如果对于 M 内每个 p，当 $t\geqslant0(t\leqslant0)$ 时 $\phi(t,p)$ 属于 M.

定理 8.1. 轨道 γ 的 α 极限集与 ω 极限集是闭的不变集. 并且，如果 $\gamma^+(\gamma^-)$ 有界，则 $\omega(\alpha)$ 极限集是非空、紧与连通的，当 $t\to\infty$ 时 $\phi(t,p)$ 与 $\omega(\gamma(p))$ 的距离趋于零，当 $t\to-\infty$ 时 $\phi(t,p)$ 与 $\alpha(\gamma(p))$ 的距离趋于零.

证明 从定义显然推出极限集是闭集. 现在我们证明正极限集是不变集. 如果 q 在 $\omega(\gamma)$ 内，就有一序列 $\{t_n\}$，当 $n\to\infty$ 时 $t_n\to\infty$，使得 $n\to\infty$ 时 $\phi(t_n,p)\to q$. 因而对于 $(-\infty,\infty)$ 任意固定的 t，根据 ϕ 的连续性知 $n\to\infty$ 时 $\phi(t+t_n,p)=\phi(t,\phi(t_n,p))\to\phi(t,q)$，这说明通过 q 的轨道属于 $\omega(\gamma)$，即 $\omega(\gamma)$ 是不变集. 相似地可证明 $\alpha(\gamma)$ 是不变集.

如果 $\gamma^+(\gamma^-)$ 有界，则 $\omega(\alpha)$ 极限集显然是非空与有界的. 闭集即意味着是紧集. 容易看出，当 $t\to\infty$ 时 $\phi(t,p)$ 与 $\omega(\gamma(p))$ 的距离趋于零，当 $t\to-\infty$ 时 $\phi(t,p)$ 与 $\alpha(\gamma(p))$ 的距离趋于零. 这

意味着 $\omega(\gamma)$ 与 $\alpha(\gamma)$ 是连通的，定理证毕.

推论 8.1. 任何轨道的极限集必只包含完全的轨线.

R^n 内的集合 M 称为(7.1)的极小集，如果它是非空、闭与不变的，并且它没有具备这三条性质的真子集.

引理 8.1. 如果 A 是(7.1)的紧、不变集，则有极小集 $M\subset A$.

证明 设 F 是 R^n 的非空子集族，它的定义是 $F=\{B:B\subset R^n, B$ 紧、不变$\}$. 对于 F 内的 B_1 与 B_2，如果 $B_2\subset B_1$ 我们说 $B_2<B_1$. 对于 F 的任意由"<"全序的子集 F_1，令 $C=\bigcap_{B\in F_1}B$. 族 F_1 具备有限交性质. 实际上，如果 B_1 与 B_2 在 F_1 内，则 $B_1<B_2$ 或 $B_2<B_1$，在两种情况下，$B_1\cap B_2$ 是非空的不变集，因此属于 F_1. 对于 F_1 内任意有限个元素，这同样是正确的. 于是 C 是非空、紧与不变集，且对于 F_1 内每个 B，$C<B$. 现在假设 F 的子集 D 有这样的性质，对 F_1 内的每个 B 有 $D<B$. 则对于 F_1 中每个 B 有 $D\subset B$，由此推知 $D\subset C$ 或 $D<C$. 因此 C 是 F_1 的最小值. 由于 F 的每个全序的子族取得极小值，从 Zorn 引理知道 F 有极小元素. 易见极小元素是(7.1)的极小集，证明就完成了.

让我们回到在 I.7 节中考虑的例子，以帮助澄清上面的概念. 在例 7.1 中，除开由临界点$\{0\}$组成的轨道以外，每条轨道的 ω 极限集是空集，每条轨道的 α 极限集是$\{0\}$. 仅有的极小集是$\{0\}$. 在例 7.2 中，轨道$\{0<x<1\}$，$\{x<0\}$的 ω 极限集是$\{0\}$，$\{x>1\}$，$\{0<x<1\}$的α极限集是$\{1\}$，$\{0\}$与$\{1\}$是极小集. 在例 7.3 中，任何轨道的 ω 极限集与 α 极限集是轨道本身，每条轨道是极小集，而以原点作中心的任何圆盘是不变集. 在例 7.4 中，圆$\{r=1\}$与点$\{r=0\}$是极小集，圆$\{r=1\}$是除开$\{r=0\}$以外的每条轨道的 ω 极限集，同时点$\{r=0\}$是单位圆内每条轨道的 α 极限集，在例 7.6 中，环面 $r=1$ 与圆 $r=0$ 同是极小集，除开 $r=0$ 以外的每条轨道的 ω 极限集是

环面 $r=1$，而在环面 $r=1$ 内侧每条轨道的 α 极限集是圆 $r=0$.

我们再举一个人为的例子以说明 ω 极限集不一定是极小集. 设 r 与 θ 是极坐标，满足方程

$$\dot{\theta}=\sin^2\theta+(1-r)^2,$$
$$\dot{r}=r(1-r).$$

所有不落在集合 $\{r=1\}$ 与 $\{r=0\}$ 上的轨道的 ω 极限集是圆 $r=1$. 圆 $r=1$ 是不变集，但是此方程在 $r=1$ 上的轨道由点 $\{\theta=0\}$，$\{\theta=\pi\}$ 与圆弧 $\{0<\theta<\pi\}$，$\{\pi<\theta<2\pi\}$ 组成，而在这个圆上的两个极小集只是点 $\{\theta=0\}$ 与 $\{\theta=\pi\}$.

习题 8.1. 给出一个二维系统的例子，它有 ω 极限集是非空与不连通集的轨道.

定理 8.2. 如果 K 是系统(7.1)的正不变集，而 K 同胚于 R^n 内的闭单位球，则系统(7.1)在 K 内至少有一个平衡点.

证明 对于任意 $\tau_1>0$，考虑把 K 内的 p 映入 K 内的 $\phi(\tau_1,p)$ 的映射. 根据 Brouwer 不动点定理，在 K 内有 p_1，使得 $\phi(\tau_1,p_1)=p_1$，于是 $\phi(t,p_1)$ 是(7.1)的周期为 τ_1 的周期轨道. 选取序列 $\tau_m>0$，当 $m\to\infty$ 时 $\tau_m\to 0$，并且对应的点 p_m 满足 $\phi(\tau_m,p_m)=p_m$. 由于 p_m 总有收敛的子序列，我们可以假定这个序列当 $m\to\infty$ 时收敛于 K 内的 p^*. 对于任意 t 与任意的整数 m，由于 $\phi(t,p_m)$ 是 t 的周期为 τ_m 的周期函数，故存在整数 $k_m(t)$，使得 $k_m(t)\tau_m\leqslant t<k_m(t)\tau_m+\tau_m$，并且对于所有的 t 有 $\phi(k_m(t)\tau_m,p_m)=p_m$. 进而有

$$\begin{aligned}|\phi(t,p^*)-p^*|&\leqslant|\phi(t,p^*)-\phi(t,p_m)|+|\phi(t,p_m)-p_m|\\&\quad+|p_m-p^*|\\&=|\phi(t,p^*)-\phi(t,p_m)|+|\phi(t-k_m(t)\tau_m,p_m)\\&\quad-p_m|+|p_m-p^*|,\end{aligned}$$

对于所有的 t，当 $m\to\infty$ 时右边各项都趋于零. 因此，p^* 是(7.1)的平衡点，定理就证明了.

在微分方程的最基本的问题中，有些是处理极小集的特征与方程的解在接近极小集的地方的性态的。自然，人们也希望能够描述从极小集与联接不同的极小集的轨道建立任意轨线的 ω 极限集的方式。在二维系统的情况，这些问题已有令人满意的答案。对于高维系统，极小集没有能完整地分类，只对非常简单的极小集彻底地讨论过解的局部性态。以下各章的主要目的是讨论这些问题的某些人门方法。

I.9. 对进一步学习的说明与建议

不用 Schauder 定理，也可以证明 Peano 定理，其详情请见 Coddington 与 Levinson[1]，Hartman[1]。在未要求微分方程的轨线具有唯一性时，通过给定点的所有轨线形成漏斗状。对于这种漏斗的拓扑性质的讨论，请见 Hartman[1]。

微分方程的概念还有另外许多推广方法。例如，人们许可向量场 $f(t,x)$ 对 t 连续，但对 x 有间断。又如，$f(t,x)$ 可能是一个集值函数(set value function)。尽管这些方程在控制理论的某些应用中极为重要，在本书中却不考虑它们。有兴趣的读者可以参考 Flugge-Lotz[1]，André 与 Seibert[1]，Fillipov[1]，Lee 与 Marcus[1]。

第 6 节中关于微分不等式的结果在更一般的场合也是正确的。事实上，可以用上右导数代替右导数。唯一性的假定可以用考虑强方程的最大解来消除，甚至还可以使用某些类型的向量不等式。微分不等式在求得不满足 Lipschitz 条件的向量场的唯一性定理时非常有用。请看 Coppel[1]，Hartman[1]，Szarski[1]，Laksmikantham 与 Leela[1]。近年来，Antosiewicz[1] 指出推论 6.5 中关于积分不等式的结论不用假设单调性也保持正确。

第 7 与第 8 节属于微分方程的几何理论，它是由 Poincaré

[1]开创并且由于 Birkhoff[1], Lefschetz[1], Nemitskii 与 Stepanov[1], Auslander 与 Gottschalk[1]等书而取得很多进展. 第 7 节的表达方式在很大程度上仰仗 Lefschetz[1]这本书. 满足第 7 节开始处罗列的性质(i—iii)的由 $R\times R^n$ 入 R^n 的函数 ϕ 称为动态系统(或动力系统). 动态系统可以而且已经不联系微分方程而研究得很详细 (请见 Gottschalk 与 Hedlund[1], Nemitskii 与 Stepanov[1]) 第 7 节内的所有结果对于动态系统保持正确. 然而, 由于不能引用隐函数定理, 证明比较困难. 第 8 节的概念实质上是 Birkhoff[1]提出的.

在第 4 节给出的稳定性定义归于 Liapunov[1]. 别的稳定性类型可见 Cesari[1], Yoshizawa[2].

第II章　二　维　系　统

本章讨论平面内的微分方程与环面上无临界点的微分方程的解的整体性质．具体地说，在第1节中完全地刻划平面内任意有界轨道的ω极限集，得到有名的Poincaré-Bendixson定理，然后用它推得某些特殊类方程极限环的存在性与稳定性．在第2节中刻划环面上没有奇点的光滑微分方程的轨道所有可能的ω极限集，得出结论：一条轨道的ω极限集是周期轨道或环面本身．

任何一个自由度的系统可以用平面上的微分方程组描述，因而后者是所讨论的两类方程中更为重要得多的．另一方面，在天体力学中的限制三体问题中，有意义的不变集是环面，因此必须研究环面上的微分方程．在下一章还可看到，许多其他应用中也出现不变环面．

II.1．平面二维系统——Poincaré-Bendixson 理论

这一节考察二维系统

$$\dot{x}=f(x), \tag{1.1}$$

这里的x是R^2的元素，$f:R^2\to R^2$与其一阶偏导数都连续，并且(1.1)满足$\phi(0,p)=p$的解$\phi(t,p)$存在于$-\infty<t<\infty$上，解$\phi(t,p)$是通过$(0,p)$的唯一解，并且在R^3内是连续的．对于每个固定的t，映射$\phi(t,\cdot):R^2\to R^2$是同胚．

利用Jordan曲线定理，可以得到二维平面系统的漂亮结果．现在不加证明地叙述这个定理．Jordan曲线乃是圆的同胚像．

Jordan曲线定理　R^2内的任意Jordan曲线J分隔全平面；比较确切地说，$R^2\backslash J=S_e\cup S_i$，这里的$S_e$与$S_i$是不相交的开集，$S_e$

无界，叫做 J 的外部，S_i 有界，叫做 J 的内部，每个集合是弧连通的。

一个集合 B 称为弧连通的，如果从 p、q 属于 B 可推知存在连结它们并且整个落于 B 内的弧 pq。

设 p 是正则点，L 是包含 p 的闭的横截线，L_0 是它的内部，

$V=\{L_0$ 内的 p：存在 $t_p>0$，使得 $\phi(t_p,p)$ 在 L_0 内，且对于 $0<t<t_p$，$\phi(t,p)$ 在 $R^2\backslash L$ 内$\}$，

又令 $W=h^{-1}(V)$，这里的 $h:[-1,1]\to L$ 是同胚。此外，设 $g:W\to(-1,1)$ 由 $g(w)=h^{-1}(\phi(t_{h(w)},h(w))$ 所定义。见图 1.1。

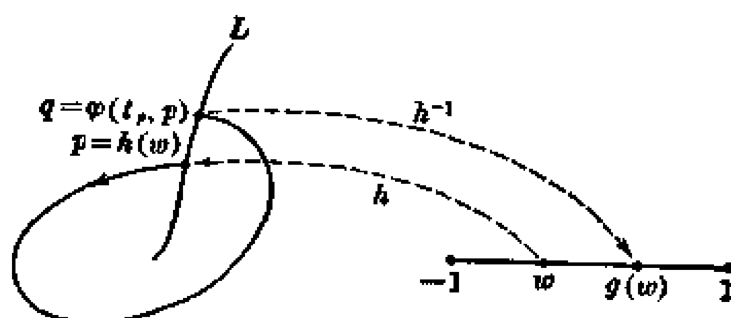


图 1.1.1

引理 1.1. W 是开集，g 在 W 上连续、增加，序列 $\{g^k(w)\}$，$k=0,1,\cdots,n\leqslant\infty$ 单调，这里 $g^k(w)=g(g^{k-1}(w))$，$k=1,2,\cdots$，$g^0(w)=w$.

证明 对于任意 $p\in V\subset L_0$，令 $q=\phi(t_p,p)$，则 $q\in L_0$. 在 I.7 节中我们已经证明，通过 p 的轨道的弧 pq 可被围在一个以它为轴的开轨柱内，此柱体的底落在横截线 L 的内部 L_0 内，这就证明了 W 是开集. 根据对于初始数据的连续性，t_p 是连续的，由之得到 g 的连续性.

为了证明引理的最后部分，考察由 $C=\{x:x=\phi(t,p),0\leqslant t\leqslant t_p\}$ 与 L 上连接 p、q 这一段所形成的 Jordan 曲线 J. 如果 $p=q$，则 $\gamma(p)$ 是周期轨道，并且对于 $w=h^{-1}(p)$，序列 $\{g^k(w)\}$ 即为一个点. 如果 $p\neq q$，为了确定起见，假设 $g(w)>w_0$，这里 $w_0=h^{-1}(p)$，$w=h^{-1}(q)$，用 S_i 与 S_e 分别记 J 的内部与外部. 根据横截线 L 的

定义，诸轨道只能顺一个方向穿过 L. 因此，由 $h[(g(w), 1)]$给出的 L_0 的那一部分必然完全在 S_i 或 S_e 之一内，否则就会有轨道顺着与通过 p 的轨道穿过 L 的方向相反的方向穿过 L_0 的 pq 这一段. 于是，如果定出了 $g^2(w)$，它必然属于$(g(w), 1)$. 用数学归纳法即可说明序列$\{g^k(w)\}$单调. 我们再设 $w_1 \in W$ 且 $w_1 > w$. 如果定出了 $g(w_1)$，则按与前面相同的理由得知 $g(w_1) > g(w)$. 这就完全证明了引理.

在 I.7 节中证明轨道柱的存在性时，用到了 $f(x)$的可微性，因此在上面的证明中也要用到它，不过在第一章末已指出这个假设是不必要的，可以在只假设解唯一的情况下证明轨道柱的存在性. 在本节的所有证明中，这是唯一用到 $f(x)$ 的可微性的地方. 特别地说，下面的 Poincaré—Bendixson 定理无需假定 $f(x)$可微也就正确.

推论 1.1. 一条轨道 γ 的 ω 极限集 $\omega(\gamma)$ 与横截线 L 的内部 L_0 只能相交于一点. 如果 $\omega(\gamma) \cap L_0 = p_0$, $\gamma = \gamma(p)$，则或者$\omega(\gamma) = \gamma$ 而 γ 是周期轨道，或者存在序列$\{t_k\}$，当 $k \to \infty$ 时 $t_k \to \infty$，使得 $\phi(t_k, p)$单调趋于 p_0，即序列 $h^{-1}(\phi(t_k, p))$单调.

证明 假设 $\omega(\gamma) \cap L_0$ 包含点 p_0. 根据 ω 极限集的定义，存在序列$\{t'_k\}$，当 $k \to \infty$ 时 $t'_k \to \infty$，使得 $k \to \infty$ 时 $\phi(t'_k, p) \to p_0$. 但是从 I.7 节得知，必然有包含 p_0 的轨道柱，使得经过充分接近 p_0 的点的任何轨道必须包含在某个点穿过横截线 L 的一段弧. 因此在 L_0 内存在点 $q_k = \phi(t_k, p)$，当 $k \to \infty$ 时 $t_k \to \infty$，使得当 $k \to \infty$ 时 $q_k \to p_0$. 但是从引理 1.1 推知，在 $h^{-1}(q_k)$是单调序列的意义下，q_k 单调趋于 p_0. 假设 p'_0 是 $\omega(\gamma) \cap L_0$ 的任何另一个点，则相同的论证成立，得到单调趋于 p'_0 的序列 q'_k. 从引理 1.1 可推知 $p'_0 = p_0$，于是就证明了推论.

推论 1.2. 如果 γ^+ 与 $\omega(\gamma^+)$有公共的正则点，则 γ^+ 是周期

轨道.

证明 如果$\gamma^+\cap\omega(\gamma^+)$中的$p_0$是正则点，则(1.1)有横截线把$p_0$包含在内部. 从推论1.1得知，若$\omega(\gamma^+)\neq\gamma^+$，则有单调趋于$p_0$的序列$q_k=\phi(t_k,p)$，由于$p_0$在$\gamma^+$内，这就与引理1.1发生矛盾，于是由推论1.1得出本推论.

定理1.1. 如果M是(1.1)的有界极小集，则M或者是临界点，或者是周期轨道.

证明 如果γ是包含在M内的轨道，则$\alpha(\gamma)$与$\omega(\gamma)$不是空集，并且属于M. 由于它们都是闭的不变集，故$\alpha(\gamma)=\omega(\gamma)=M$. 如果$M$包含一个临界点，则由于对某$\gamma$而言，临界点等于$\omega(\gamma)$，故$M$即是此临界点本身. 如果$M=\omega(\gamma)$不包含临界点，则由$\gamma\subset\omega(\gamma)$推知$\gamma$与$\omega(\gamma)$有公共的正则点，再由推论1.2推知$\gamma$是周期轨道，于是$\gamma=\omega(\gamma)=M$，这就证明了定理1.1.

引理1.2. 如果$\omega(\gamma^+)$包含正则点还有周期轨道γ_0，则$\omega(\gamma^+)=\gamma_0$.

证明 如果结论不成立，则由$\omega(\gamma^+)$的连通性推知存在着$\omega(\gamma^+)\backslash\gamma_0$内的$p_n$所成序列$\{p_n\}$与$\gamma_0$的$p_0$使得当$n\to\infty$时$p_n\to p_0$. 由于$p_0$是正则点，故有闭的横截线$L$使得$p_0$在$L$的内部$L_0$内. 从推论1.1知$\omega(\gamma^+)\cap L_0=\{p_0\}$. 根据I.7节中轨柱的存在性，$p_0$有这样的邻域$N$，任何进入$N$的轨道必与$L_0$相交，特别对于充分大的$n$而言，$\gamma(p_n)$必与$L_0$相交. 但是我们知道交点是$p_0$，因之当$n$充分大时$p_n$属于$\gamma_0$，这就产生了矛盾.

定理1.2. (Poincaré-Bendixson 定理)，如果γ^+是一条有界正半轨，而$\omega(\gamma^+)$不包含临界点，则或者

(i) $\gamma^+=\omega(\gamma^+)$

或者

(ii) $\omega(\gamma^+)=\bar{\gamma}^+\backslash\gamma^+$.

在任何一种情况下，ω 极限集是周期轨道，在后一种情况下，它被叫做极限环. 同样的结果对负半轨也正确.

证明 按照假设与定理 I. 8. 1，$\omega(\gamma^+)$非空、紧不变、只包含正则点. 因此根据引理I. 8. 1，在 $\omega(\gamma^+)$内有一个有界极小集M，它只包含正则点. 从定理 1. 1 推知M是周期轨道 γ_0. 再引用引理 1. 2 便推出了本定理.

(1. 1)的不变集M称为稳定的，如果对于M的每个 ε 邻域 U_ε 存在M的 δ 邻域 U_δ 使得由 p 在 U_δ 内推出 $\gamma^+(p)$在 U_ε 内. M称为渐近稳定的，如果它是稳定的并且存在 $b>0$ 使得由 p 在 U_b 内推知当 $t\to\infty$时 $\phi(t,p)$与M的距离趋于 0. 如果M是周期解，人们还可以按明显的方式定义从M的内部与外部而说的稳定性.

推论 1. 3. 为使周期轨道 γ_0 渐近稳定，必须而且只须存在 γ_0 的邻域G 使得对于G中任何的 p 有 $\omega(\gamma(p))=\gamma_0$.

证明 先证明充分性. 显然，对于G中每个 p，当 $t\to\infty$ 时 $\phi(t,p)$与 γ_0 的距离趋于 0. 假设 L是在 γ_0的 p_0 的横截线，又假设 $p\in G\cap S_e$，$q\in G\cap S_i$，这里的 S_e 与 S_i 分别是 γ_0 的外部与内部. 从推论 1. 1 知，在 L内有序列 $p_k=\phi(t_k,p)$，$q_k=\phi(t_k',q)$，当 $k\to\infty$ 时都趋于 p_0. 考虑由 $\gamma(p)$的弧 p_kp_{k+1} 和 L上位于 p_k 与 p_{k+1} 间的线段形成的闭曲线与由 $\gamma(q)$的弧 q_kq_{k+1} 和 L上位于 q_k 与 q_{k+1} 间的线段形成的闭曲线之间的区域 U_k，它是 γ_0 的邻域，序列$\{t_k\}$，$\{t_k'\}$当 $k\to\infty$时满足 $t_{k+1}-t_k\to\alpha$，$t_{k+1}'-t_k'\to\alpha$，这里的 α 是 γ_0 的周期. 这一点是从围绕 γ_0 的轨道环的存在性推出的；于是从对初始数据的连续性推知对于任意给定的 γ_0 的 ε 邻域 U_ε，存在充分大的 k 以致从 p 在 U_k 内推知 $t\geqslant0$ 时 $\phi(t,p)$在 U_ε 内，故 γ_0 是稳定的.

为了证明必要性，假设 γ_0 渐近稳定. 于是 γ_0 必然有邻域 G，在其中不包含平衡点，而 $G\backslash\gamma_0$ 不包含周期轨道. 由 Poincaré-Bendixson 定理推知每个轨道的 ω 极限集是周期轨道. 由于 γ_0

是G中仅有的轨道，这就证明了推论.

推论 1.4. 假设γ_1、γ_2是两个周期轨道，γ_2在γ_1的内部，在γ_1与γ_2之间没有周期轨道或临界点. 则这二轨道不可能在γ_1与γ_2之间这一侧渐近稳定.

证明 假设γ_1、γ_2在它们之间这一侧稳定，则在它们之间的区域内有正轨道γ_1'、γ_2'以致$\gamma_1=\bar{\gamma}_1'\backslash\gamma_1'$，$\gamma_2=\bar{\gamma}_2'/\gamma_2'$. 对于任意$\gamma_1$内的$p_1$与$\gamma_2$内的$p_2$，作出横截线$L_1$与$L_2$. 在$\gamma_1'\cap L_1$内有$p_1'\neq p_1''$，在$\gamma_2'\cap L_2$内有$p_2'\neq p_2''$. 考虑由$\gamma_1'$的弧$p_1'p_1''$和$L_1$上位于$p_1'$与$p_1''$间的线段所形成的 Jordan 曲线与由$\gamma_2'$的弧$p_2'p_2''$和$L_2$上位于$p_2'$与$p_2''$间的线段所形成的曲线，它们之间的区域记作$S$(见图 1.2). 在$S$内包含负半轨，于是由 Poincaré-Bendixson 定理推知其中有周期轨道. 这是个矛盾，由此证明了推论.

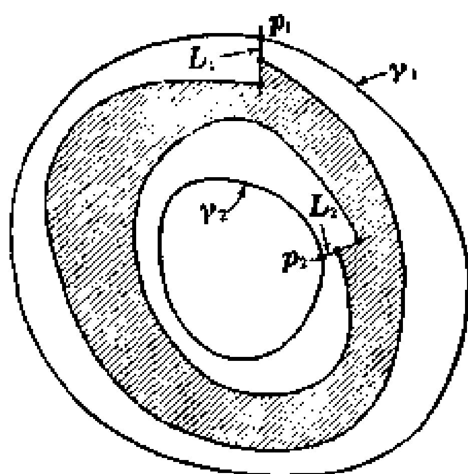


图 Ⅱ.1.2

定理 1.3. 设γ^+是在R^2的闭有界子集K内的正半轨，又假设K只包含有限个临界点. 则下列情况之一必成立:

(i) $\omega(\gamma^+)$是一个临界点;

(ii) $\omega(\gamma^+)$是一条周期轨道;

(iii) $\omega(\gamma^+)$包含有限个临界点与一组轨道γ_i，对每一γ_i $\alpha(\gamma_i)$与$\omega(\gamma_i)$由一个临界点组成，见图 1.3.

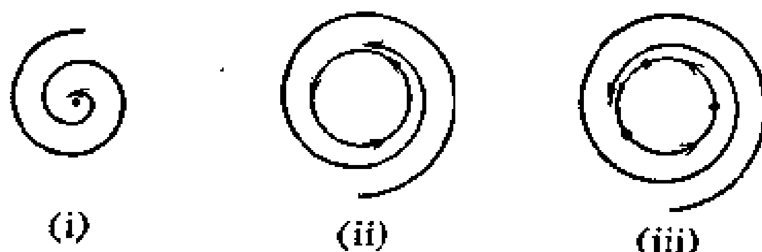


图 Ⅱ.1.3

证明 $\omega(\gamma^+)$最多包含有限个临界点，如果它不包含正则点，则由于连通性，它必然恰巧是一个点．这是情况(i)．假设$\omega(\gamma^+)$有正则点又包含周期轨道γ_0，则从引理1.2知$\omega(\gamma^+)=\gamma_0$．这是情况(ii)．

现在假设$\omega(\gamma^+)$包含正则点但不包含周期轨道．令γ_0是$\omega(\gamma^+)$内的轨道．于是$\omega(\gamma_0)\subset\omega(\gamma^+)$．如果$\omega(\gamma_0)$内的$p_0$是正则点，而$L$是过$p_0$的、内部为$L_0$的闭横截线，则由推论1.1知$\omega(\gamma^+)\cap L_0=\omega(\gamma_0)\cap L_0=\{p_0\}$．而$\gamma_0$必在某$q_0$与$L_0$相交．由于$\gamma_0$属于$\omega(\gamma^+)$，故有$q_0=p_0$．由推论1.2和$\gamma_0$是周期轨道．由这个矛盾推知$\omega(\gamma_0)$没有正则点．但是$\omega(\gamma_0)$是连通的，于是它恰巧是一个点即临界点．对$\alpha$极限集作相似的论证，就证明了定理．

推论1.5． 如果γ^+是包含在Ω内一个紧集中的正半轨，而$\omega(\gamma^+)$包含正则点与恰巧一个临界点p_0，则在$\omega(\gamma^+)$内有一轨道，其α极限集与ω极限集是$\{p_0\}$．

现在我们来讨论在周期轨道的邻域内，轨道可能有的特性．设γ_0是周期轨道，L_0是在γ_0上p_0的横截线，$h:(-1,1)\to L_0$是同胚，且$h(0)=p_0$．如果g是引理1.1中定义的函数，则由于γ_0是周期轨道，$g(0)=0$．由于g的定义域W是开集，0在W内，g连续与递增，所以存在$\varepsilon>0$使得g在$(-\varepsilon,\varepsilon)$内有定义，并且对$w\in(0,\varepsilon)$有$g(w)>0$，对$w\in(-\varepsilon,0)$有$g(w)<0$．我们来仔细地讨论在$(0,\varepsilon)$上$g(w)>0$的情况，在$(-\varepsilon,0)$上$g(w)<0$的情况可以相似地处理．有三种可能性：存在$\varepsilon_1$，$0<\varepsilon_1<\varepsilon$以致

(i) 对于$(0,\varepsilon_1)$内的w，$g(w)<w$;

(ii) 对于$(0,\varepsilon_1)$内的w，$g(w)>w$;

(iii) 对于$n\to\infty$时趋于零的正序列w_n，$g(w)=w$．

在情形(i)中，$g^k(w)$对于每个$k>0$有定义，单调递减并且$k\to\infty$时

$g^k(w)\to 0$. 事实上，对于 $k>0$，$g^k(w)$ 显然有定义. 引理 1.1 说明 $g^k(w)$ 单调. 而由假设推知此序列递减. 因此 $k\to\infty$ 时 $g^k(w)\to w_0\geqslant 0$. 但由此推知 $g(w_0)=w_0$，故 $w_0=0$. 相似地在情形(ii)中，如果定义 $g^{-k}(w)$ 为 $g^k(w)$ 的逆，则对于每个 $k>0$，$g^{-k}(w)$ 有定义，递减并且 $k\to\infty$ 时 $g^{-k}(w)\to 0$.

如果用轨道与极限集的术语来说明这三种情形，便得到

定理 1.4. 如果 γ_0 是周期轨道，而 G 是包含 γ_0 的开集，$G_e=G\cap S_e$，$G_i=G\cap S_i$，其中 S_e 与 S_i 是 γ_0 的内部与外部，则下列情况之一出现：

(i) 有一个 G 使得对于 G_e 中的每个 p 或者有 $\gamma_0=\omega(\gamma(p))$ 或者有 $\gamma_0=\alpha(\gamma(p))$；

(ii) 对于每个 G，在 G_e 内有一个不属于 γ_0 的 p，使得 $\alpha(\gamma(p))=\gamma(p)$ 是周期轨道.

对于 G_i 成立着相似的事实.

在此定理的情况(i)中，我们称 γ_0 为极限环；即 γ_0 是一个极限环，如果 γ_0 有一个邻域 G，以致对于 G_e(或 G_i)的每个 p，或者有 $\omega(\gamma(p))=\gamma_0$，或者有 $\alpha(\gamma(p))=\gamma_0$.

Poincaré-Bendixson 定理提出了确定平面自治微分方程非常数周期解的存在性的一个方法，更具体地说，试图在 R^2 作出一个区域 D，其中没有平衡点，并且是正不变的；也就是说，(1.1)的任何初始值在 D 内的解对于 $t\geqslant 0$ 也在 D 内. 在这种情况下，我们从 Poincaré-Bendixson 定理确信由于 D 包含正半轨 γ^+ 因之包含周期解. 如果进而能断言在 D 内仅有一条周期轨道，那么根据定理 1.4 与推论 1.3 知它是渐近稳定的.

今对 Lienard 型方程

$$\ddot{u}+g(u)\dot{u}+u=0 \tag{1.2}$$

来说明这些想法，这里 $g(u)$ 连续，且满足下列条件：

(a) $G(u)\overset{\text{def}}{=}\int_0^u g(s)ds$ 是 u 的奇函数;

(b) 当 $|u|\to\infty$ 时 $G(u)\to\infty$. 又存在 $\beta>0$ 以致对 $u>\beta$ 有 $G(u)>0$, 并且单调递增; (1.3)

(c) 存在 $\alpha>0$ 以致 $0<u<\alpha$ 时 $G(u)<0$.

方程(1.2)等价于方程组

$$\begin{aligned}\dot{u}&=v-G(u),\\ \dot{v}&=-u.\end{aligned} \tag{1.4}$$

这个系统是系统(1.1)当 $x=(u,v)$ 的特殊情形，由于 G 有连续的一阶导数，通过 R^2 内的任意一点，(1.4)有唯一轨道. 系统(1.4)只有一个临界点，即 $u=0,v=0$，而(1.4)的轨道是一阶方程

$$\frac{dv}{du}=-\frac{u}{v-G(u)} \tag{1.5}$$

的解.

从(1.4)看出，函数 $u=u(t)$ 当 $v>G(u)$ 时递增，当 $v<G(u)$ 时递减，函数 $v=v(t)$ 当 $u>0$ 时递减，当 $u<0$ 时递增. 同时，从(1.5)描出的轨道在 v 轴上的切线是水平的，在曲线 $v=G(u)$ 上是垂直的. 从这些事实与关于 $G(u)$ 的假设(1.3b)推知，(1.4)的取初始值 $A=(0,v_0)$ 的解对于充分大的 v_0 描出具有图 1.4 中所示这种一般形状的弧的轨道.

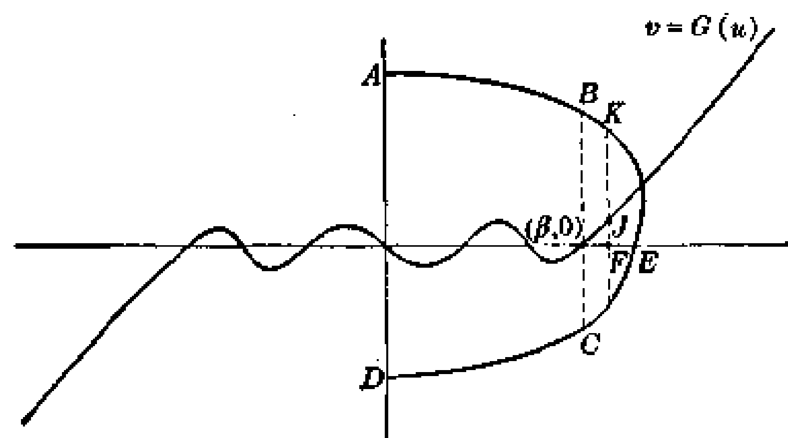


图 Ⅰ.1.4

从假设(1.3a)看出，如果(u,v)是(1.4)的解，则$(-u,-v)$也是解. 因此，如果已知存在着图1.4中的轨道$ABECD$，则由它通过以原点为中心的反射得到另一条轨道. 特别地说，如果$A=(0,v_0)$，$D=(0,-v_1)$，$v_1<v_0$，则通过任一点$A'=(0,v_0')\ (0<v_0'<v_0)$的轨道的整个正半轨有界. 事实上，它必定落在由弧$ABECD$，它对于原点的反射像以及连接它们的$v$轴线段所形成的Jordan曲线所界出的区域内. 从上述这种对称性还推知当且仅当$v_1=v_0$时(1.4)可能有周期轨道.

我们来说明存在充分大的$v_0>0$，使得如图1.4所示的解存在，这里$A=(0,v_0)$，$D=(0,-v_1)$，$v_1<v_0$. 为此，考虑函数$V(u,v)=(u^2+v^2)/2$. 如果u,v是(1.4)与(1.5)的解，则

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad \frac{dV}{dt}=-uG(u),\\
&(b)\quad \frac{dV}{du}=-\frac{uG(u)}{v-G(u)},\\
&(c)\quad \frac{dV}{dv}=G(u).
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

利用这些表达式，得知沿着(1.4)的轨道有

$$
V(D)-V(A)=\int_{ABECD}dV=\left(\int_{AB}+\int_{CD}\right)\frac{-uG(u)}{v-G(u)}du+\int_{BEC}G(u)dv.
$$

显然当$v_0\to\infty$时第一个表达式单调趋于零. 如果F是u轴上位于$(\beta,0)$与E之间的任意一点，又$\phi(v_0)=\int_{BEC}G(u)dv$，则

$$
-\phi(v_0)=-\int_{BEC}G(u)dv=\int_{CEB}G(u)dv>\int_{EK}G(u)dv>FJ\times FK,
$$

这里的FJ、FK是图1.4中线段的长度. 对于固定的F，当$v_0\to\infty$

时 $FK\to\infty$，这就证明了 $v_0\to\infty$ 时 $\phi(v_0)\to-\infty$. 于是存在 v_0 以致 $V(D)<V(A)$. 这意味着 $v_1<v_0$，并且通过 A 的半轨必定有界. 另一方面，此半轨离开原点的距离也是不等于零的，这是因为从(1.6a)与假设 (1.3c) 推知如果 $|u|<\alpha$ 则沿着 (1.4) 的解有 $\frac{dV}{dt}\geqslant 0$. 最后从 Poincaré-Bendixson 定理推知(1.4)有周期解，于是得

定理 1.5. 如果 G 满足条件 (1.3)，则方程(1.2)有非常数的周期解.

如果对 G 作进一步的假设，则按上面的证明方法将证明恰巧存在一个非常数的周期解. 事实上，可以证明

定理 1.6. 如果 G 满足条件(1.3)，且 $\alpha=\beta$，则方程(1.2)只有一个周期轨道，并且它是渐近稳定的.

证明 根据这种对 G 的较强的假设，每个取初始值 $A=(0, v_0)$，$v_0>0$ 的解有如图 1.5 所示的轨道弧.

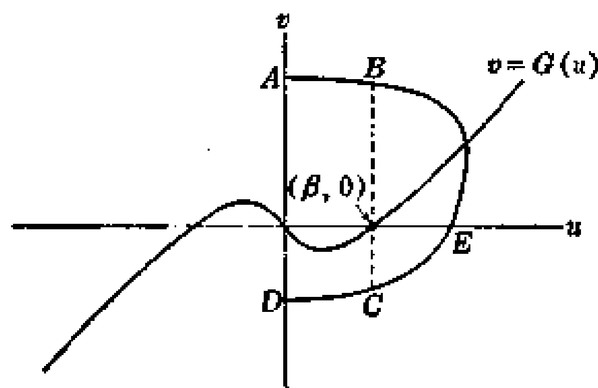


图 Ⅱ.1.5

用定理 1.5 证明中的记号，及 $E=(u_0, 0)$，得知若 $u_0<\alpha$ 则

$$V(D)-V(A)=\int_{ABECD}G(u)dv>0,$$

由此推知没有周期轨道能有 $u_0<\alpha$.

对于 $u_0>\alpha$，如果对图 1.5 中线 BC 的右边引入新变量 $x=G(u)$，$y=v$(这是合法的，因为在这个区域内 $G(u)$ 是单调增加的)，

那么弧 BEC 便成为端点在 y 轴上的弧 $B^*E^*C^*$，而表达式 $\phi(v_0)$ $=\int_{BEC}G(u)dv=\int_{B^*E^*C^*}xdy$ 是由曲线 $B^*E^*C^*$ 与 y 轴所界面积的负值．于是 $\phi(v_0)$ 是 v_0 的单调递降函数．在定理 1.5 的证明中还指出当 $v_0\to\infty$ 时 $V(D)-V(A)$ 趋于 $-\infty$．于是存在唯一 v_0，使 $v(D)=v(A)$，它对应着唯一非常数周期解．由定理 1.4 与推论 1.3 得出轨道的稳定性，证明于是完成．

定理 1.6 的重要特例是 van der Pol 方程

$$\ddot{u}-k(1-u^2)\dot{u}+u=0, \qquad k>0. \tag{1.7}$$

在上面的粗糙分析中，对于定理 1.6 中给出的唯一极限环的位置，只得到很少的知识．当微分方程中包含一个参数时，可以讨论当参数趋于某个值时精确的极限性质．用 van der Pol 方程 (1.7) 来说明．假设 k 很大；比较具体地说设 $k=e^{-1}$，来确定 $e\to0^+$ 时周期解的性质．这类振动叫做松弛振动．系统(1.7)等价于

$$\begin{aligned} e\dot{u}&=v-G(u),\\ \dot{v}&=-eu. \end{aligned} \tag{1.8}$$

这里的 $G(u)=\dfrac{u^3}{3}-u$．根据定理 1.6，方程(1.8)对于每个 $e>0$ 有唯一渐近稳定极限环 $\Gamma(e)$．如果 e 很小，而在图 1.6 中的轨道又远离曲线 $v=G(u)$，则从(1.8)知 u 坐标的速度很大，而 v 坐标

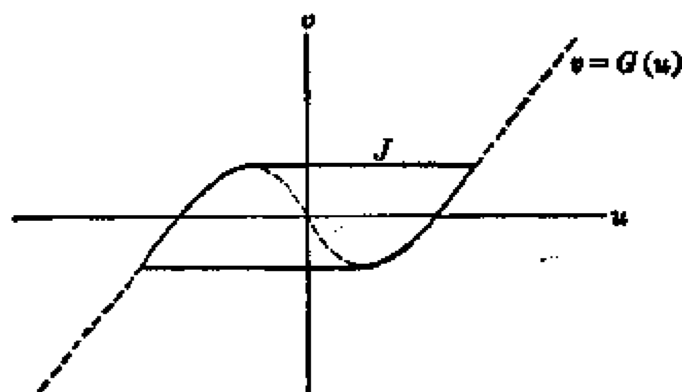


图 I.1.6

运动缓慢．因之，轨道有在水平方向跳跃的趋势，除非它很靠近曲线 $v=G(u)$．这些直观的说明被精确叙述成

定理 1.7. 当 $\varepsilon\to 0$ 时，(1.8) 的极限环趋于图 1.6 中所示的曲线 $v=G(u)$ 与水平线段组成的 Jordan 曲线 J.

为了证明它，我们作一个包含 J 的环形区域 U，以致 U 与 J 的距离等于任意预先指定的常数，又对于充分小的 e，所有轨线穿过 U 的边界向内．根据 Poincaré-Bendixson 定理，U 将包含极限环 $\Gamma(e)$．在图 1.7 中画出了 U，其中 h 为正的常数．直线段 81与 45 分别是 $v=G(u)+h, v=G(u)-h$ 的切线，直线段 56, 12, 9-10, 13-14 是水平的，而直线段 23、67、11-12、15-16 是垂直的．其它线的作法是明显的．内外边界取得对称于原点．在图中箭头所记的是穿过边界的有向线段．这些都是从微分方程直接得到的，并且不依赖于 $e>0$．必须说明如果 e 小时，在边界的另外线段上轨道也是由外向内的．按照对称性，只需讨论 34、45 与 10-11 上的情形．

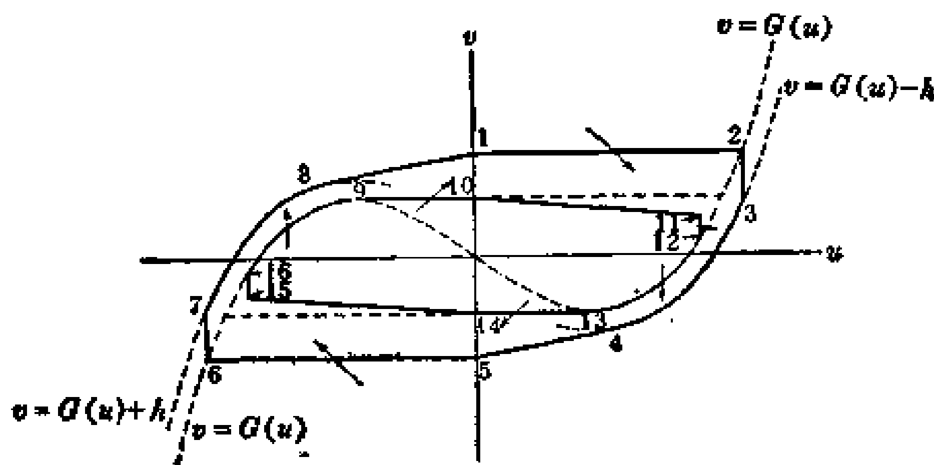


图 Ⅱ.1.7

在 34 上的任意点 $(u, G(u)-h)$，沿着(1.8)的轨道，有

$$\frac{dv}{du}=\frac{-e^2u}{v-G(u)}=\frac{e^2u}{h}<\frac{e^2u(3)}{h}$$

这里的 $u(3)$ 是在点 3 的 u 值，于是对于充分小的 e，$\frac{dv}{du}$ 小于 $g(4)<$

$g(u)$，$g(u)$是曲线 $G(u)-h$ 的斜率．于是由在这一段弧上 $\dot{v}<0$，推知轨道穿过它进入区域．

沿着弧 45，有$|v-G(u)|\sim h$，于是轨线斜率的绝对值$|dv/du|=|-e^2u/[v-G(u)]|<e^2u(4)/h$ 当 $e\to 0$ 时趋于零．对于 e 足够小，可使$|dv/du|$小于线 45 的斜率 $g(4)$，于是由 $\dot{v}<0$ 推知当 e 足够小时轨道穿过弧 45 进入 U．

设K为弧 11-12 的长度．对于足够小的 K，沿着弧 10-11 有$|v-G(u)|>K$．于是沿着 (1.8) 的轨道$|dv/du|$小于 $e^2u/K<e^2u(11)/K$，当 $e\to 0$ 时它趋于零．故对于小的 e，由于在此弧上 $\dot{u}>0$，轨道进入 U．

这就说明给定上述类型的区域 U，总可取 e 足够地小，以保证轨道穿过U的边界向内．显然只要合适地选取在作出U时的参数，便可使U如所希望的那样近似于 J，由此证明了所要的结果．

习题 1.1．证明下述定理．在 R^2 中任何包含(1.1)一条有界半轨的区域中必包含一个平衡点．提示：利用 Poincaré-Bendixson 定理与定理 I.8.2．

习题 1.2．上面的定理在 R^3 内仍正确吗？给出例子．

习题 1.3．证明下述定理．如果在一个闭二维胞腔Ω中 $\mathrm{div}f$ 有固定的符号(不包括零)，则Ω没有周期解．提示：利用在由Ω内周期轨道所界区域上由 Green 定理导出的矛盾来证明．

习题 1.4．考虑二维系统 $\dot{x}=f(t,x)$，这里的 f 对 x 的一阶导数连续，$f(t+1,x)=f(t,x)$．假设Ω是 R^2 的子集，它同胚于闭的单位圆盘．同时，对于任何解 $x(t,x_0)$，$x(0,x_0)=x_0$，假设有 $T(x_0)$ 使得对所有 $t\geq T(x_0)$ 而言，$x(t,x_0)$在 Ω 内．用 Brouwer 不动点定理证明存在整数 m，以致方程有周期为m的周期解．是否存在周期为 1 的周期解呢？

习题 1.5．假设 f 如同习题 1.4 中所设，又存在 $\lambda>0$ 使得对

于所有 t, x 有 $x'f(t,x)\leqslant-\lambda|x|^2$. 如果 $g(t)=g(t+1)$, 又 g 是连续函数, 证明方程 $\dot{x}=f(t,x)+g(t)$有周期为 1 的周期解.

习题 1.6. 极限环是否必为孤立的周期解? 解释之.

习题 1.7. 假设 γ_0 是二维系统的周期轨道, 又设 S_e 与 S_i 分别是 γ_0 的外部与内部. 能否对于某个方程而言, 对 S_i 中所有 p 有 $\alpha(\gamma(p))=\gamma_0$, 对 S_e 中所有 q 有 $\omega(\gamma(q))=\gamma_0$? 解释之.

习题 1.8. 对于 Lienard 方程, 是否必有从外侧稳定的极限环? 是否必有从内侧稳定的极限环? 解释之.

习题 1.9. 能否有二维系统以致在某个环形区域内的每条轨道是周期轨道而环的边界都是极限环? 对于解析系统能发生这种情形吗? 解释之.

Ⅱ.2. 环面上的微分系统

在这一节里, 我们讨论一阶方程组

$$\begin{aligned}\dot{\phi}&=\Phi(\phi,\theta),\\ \dot{\theta}&=\Theta(\phi,\theta)\end{aligned}\tag{2.1}$$

解的性态, 这里

$$\begin{aligned}\Phi(\phi+1,\theta)&=\Phi(\phi,\theta+1)=\Phi(\phi,\theta),\\ \Theta(\phi+1,\theta)&=\Theta(\phi,\theta+1)=\Theta(\phi,\theta).\end{aligned}\tag{2.2}$$

我们假设 Φ, Θ连续, 又在 ϕ,θ 平面内, 通过任意给定的点, (2.1)有唯一解. 由于 Φ, Θ有界, 解将在$(-\infty,\infty)$上存在.

如果把 ϕ, θ 平面内单位正方形的对边看作是重合的, 那么就产生出一个环面$\mathscr{T}$, 而方程(2.1)可以解释为环面上的微分方程. 把(2.1)在 ϕ, θ 平面内的轨道在环面上进行解释, 就像图 2.1 中那样.

我们还假设(2.1)没有平衡点, 特别, 对所有 ϕ, θ 有 $\Phi(\phi,\theta)\neq0$. 于是(2.1)的相图由

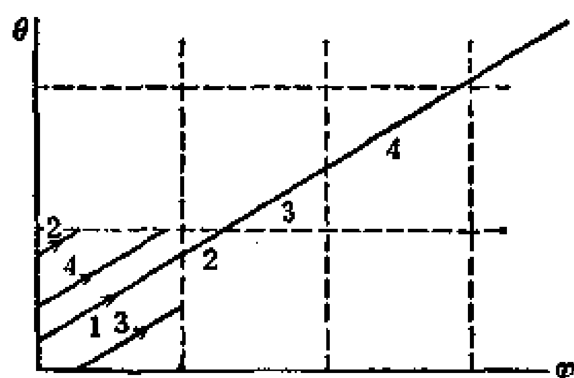


图 Ⅱ.2.1

$$\frac{d\theta}{d\phi}=A(\phi,\theta) \tag{2.3}$$

所确定，这里的 $A(\phi,\theta)$ 对所有 ϕ、θ 连续，并且

$$A(\phi+1,\theta)=A(\phi,\theta+1)=A(\phi,\theta).$$

下面围绕着(2.3)的解来讨论.

环面$\mathscr{T}$可按关系式

$$\begin{aligned}&x=(R+r\cos 2\pi\theta)\cos 2\pi\phi,\\&y=(R+r\cos 2\pi\theta)\sin 2\pi\phi,\\&z=r\sin 2\pi\theta,\\&0\leqslant\phi<1,\ \ 0\leqslant\theta<1,\ \ 0<r<R\end{aligned} \tag{2.4}$$

嵌入 R^3. 这样作仅仅是为了术语的方便. 我们将把圆 $\phi=$常数叫做子午线，把 $\theta=$常数叫做纬线.

例 2.1. 在 (2.1) 中如果 $\Phi=1$, $\Theta=$常数 ω, 则在(2.3)中 $A(\theta,\phi)=\omega$. (2.3)的满足 $\theta(\phi_0,\phi_0,\theta_0)=\theta_0$ 的解是 $\theta(\phi,\phi_0,\theta_0)=\omega(\phi-\phi_0)+\theta_0$.

情形(i) 如果 ω 是有理数，比方说 $\omega=p/q$, p 与 q 为整数，则 $\theta(\phi_0+q,\phi_0,\theta_0)=\theta_0+p$. 但在环面$\mathscr{T}$上，对于任意整数 p、q，点 (ϕ_0,θ_0) 与 (ϕ_0+q,θ_0+p) 是相同的点. 于是在$\mathscr{T}$上通过 (ϕ_0,θ_0) 的轨道是闭曲线. 由此推知把(2.4)中的函数用由(2.1)给出的θ、ϕ的参数表达式表示为 t 的函数时，它是周期函数.

情形(ii) 如果 ω 是无理数，就不存在整数 p、q 使得对于任意 θ_0 有 $\theta(\phi_0+q, \phi_0, \theta_0)=p+\theta_0$. 因之，在$\mathscr{T}$上没有闭轨道，(2.4)中的函数不是周期的. 我们来说明在这种情形下，$\mathscr{T}$上每一轨道在$\mathscr{T}$中稠密. 由于平面内的轨道都是斜率为常数 ω 的，只需说明轨道在子午线 $\phi=0$ 内稠密便行了. 存在常数 $\delta>0$，使得对于$[0, 1)$中任意 γ，有整数对(q_k, p_k)的序列，当 $k\to\infty$ 时 $q_k\to\infty$，以致$|\omega-p_k/q_k-\gamma/q_k|<\delta/q_k^2$. 在$\mathscr{T}$上，$(q_k, \theta(q_k, 0, 0))=(0, \omega q_k)=(0, p_k+\gamma+\eta_k)=(0, \gamma+\eta_k)$，这里当 $k\to\infty$ 时 $\eta_k\to 0$. 这证明通过$(0, 0)$的轨道稠密，对任何其他轨道而言，同样结论也显然正确. 把由(2.1)给出的 θ、ϕ 的参数表达式代入之后，(2.4)中各函数对 t 就是拟周期的(其定义请看附录)，这是由于对任意初始点(ϕ_0, θ_0)，它们显然可以表示为 $x(t)=\delta_1(t, \omega t)$, $y(t)=\delta_2(t, \omega t)$, $z(t)=\delta_3(t, \omega t)$，这里的每个 δ_j 是它的每一个自变数的周期等于 1 的周期函数.

例2.2. 如果 $A(\phi, \theta)=\sin 2\pi\theta$，在$\mathscr{T}$上就有两条闭轨道 $\theta=0$ 与 $\theta=\frac{1}{2}$. 在$\mathscr{T}$上集合 $\theta=0$ 与 $\theta=1$ 是相同的. 显然，对于任意 θ_0, $0<\theta_0<1$，在$\mathscr{T}$上的对应轨道以闭轨道 $\theta=\frac{1}{2}$作为 ω 极限集，以闭轨道 $\theta=0$ 作为 α 极限集.

在这两个例子中有两个值得注意的差别，在例 2.1 的情形(ii)，$\mathscr{T}$上任意轨道的 α 与 ω 极限集是$\mathscr{T}$本身. 在例2.1的情形(i)，每条轨道是闭的，而在例 2.2 中，存在着孤立的闭轨道，它们是其它所有轨道的极限集. 下面将对于光滑的向量场证明，$\mathscr{T}$上的一般方程 (2.3) 的任意轨道的 ω 极限集与 α 极限集必然是$\mathscr{T}$本身或闭轨道.

由于(2.3)的每个解在 $-\infty<\phi<\infty$ 上存在，故$\mathscr{T}$上每条轨道必穿过子午线 $C:\phi=0$，因此总可取初始值为$(0, \xi)$. 设 $\theta(\phi, \xi)$是

(2.3)通过 $(0,\ \xi)$ 的解，$\theta(0,\ \xi)=\xi$. 从(2.3)解的唯一性假设推知，$\theta(\phi,\xi)$对于每个ϕ而言是ξ的单调递增函数. 同时，映射 $\xi\to\theta(1,\xi)$是把实直线映到自身的同胚，由此诱导出C到自身的同胚T. 事实上，

$$TP=P_1,\ \ P=(0,\xi),\ \ P_1=(1,\theta(1,\xi))=(0,\theta(1,\xi)).$$

从(2.3)解的唯一性知$\theta(1,\xi)$是单调递增函数，于是T保持着C的定向. 此外，由(2.3)的周期性与解的唯一性推知

$$\theta(\phi,\xi+m)=\theta(\phi,\xi)+m \tag{2.5}$$

对任何整数m成立.

在定义

$$T^nP=T(T^{n-1}P),\ \ T^0P=P$$

以后，容易看出

$$T^nP=(0,\theta(n,\xi));\ \ T^{m+n}P=T^m(T^nP)$$

对所有 $m,n=0,\pm1,\cdots$成立. 首先，由于$\theta(1,\xi)$是同胚，又由$T^0P=P$推知从$P=T(T^{-1}P)$唯一地确定了T^{-1}，因之上述定义对所有负整数也有意义，并且可以归纳地确定T^{-2}, T^{-3}等等. 为了证明上面的断言，注意(2.3)的周期性及解的唯一性，推知

$$\theta(m,\theta(n,\xi))=\theta(n,\theta(m,\xi))=\theta(m+n,\xi)$$

对所有整数m, n成立. 这个关系式直接产生上面的断言.

定理 2.1. (2.3)的旋转数

$$\rho\overset{\text{def}}{=\!=}\lim_{|n|\to\infty}\frac{\theta(n,\xi)}{n}$$

存在，而且不依赖于ξ. 此外，ρ是有理数的充分必要条件是T的某些幂有不动点，即在环面上存在闭轨道.

旋转数可以解释为围绕纬线的带子对于子午线的平均旋转角，或解释为(ϕ,θ)平面内通过原点与过$(0,\xi)$的轨道上的点$(n,\theta(n,\xi))$的直线的平均斜率.

定理 2.1 的证明．分成四部分．

(i) 如果 ρ 对某个 $\bar{\xi}$ 存在，则它对每个 ξ 存在，并且不依赖于 ξ．由于 $\theta(\phi, \xi)$ 满足(2.5)，只需考虑 $0\leqslant\xi, \bar{\xi}<1$ 的情况．对于 $0\leqslant\xi, \bar{\xi}<1$，从关系式(2.5)与 $\theta(\phi,\xi)$ 对 ξ 的单调性推知

$$\theta(\phi, \bar{\xi})-1=\theta(\phi,\bar{\xi}-1)\leqslant\theta(\phi, \xi)\leqslant\theta(\phi,\bar{\xi}+1)$$
$$=\theta(\phi,\bar{\xi})+1,$$

由此便可推出所要的结果．

(ii) ρ 总是存在的．下面的证明是M. Peixoto 通信提供给作者的．根据(i)，我们只需考虑 $\xi=0$．对于任意实数 ξ，存在整数 m，以致 $0\leqslant\xi-m\leqslant1$，于是 $\theta(\phi,0)\leqslant\theta(\phi,\xi-m)\leqslant\theta(\phi, 1)$，从(2.5)又推出

$$\theta(\phi,0)\leqslant\theta(\phi,\xi)-m\leqslant\theta(\phi,0)+1.$$

如果 $\gamma=\xi-m$，则 $0\leqslant\gamma\leqslant1$，而从上面的关系式得到 $\theta(\phi,0)-\gamma\leqslant\theta(\phi,\xi)-\xi\leqslant\theta(\phi,0)+1-\gamma$．由于 $0\leqslant\gamma\leqslant1$，得知

$$\theta(\phi,0)-1\leqslant\theta(\phi,\xi)-\xi\leqslant\theta(\phi,0)+1$$

对所有 ϕ、ξ 成立．特别地说，对于任意整数 m 有

$$\theta(m,0)-1\leqslant\theta(m,\xi)-\xi\leqslant\theta(m,0)+1. \tag{2.6}$$

从这个关系式又得知 $\theta(2m,0)=\theta(m,\theta(m,0))$ 满足 $2\theta(m,0)-2\leqslant2\theta(m,0)-1\leqslant\theta(2m,0)\leqslant2\theta(m,0)+1\leqslant2\theta(m,0)+2$.

逐次使用(2.6)，得知

$$n\theta(m,0)-n\leqslant\theta(nm,0)\leqslant n\theta(m,0)+n$$

对所有 $n\geqslant0$ 成立，

$$n\theta(-m,0)-n\leqslant\theta(-nm,0)\leqslant n\theta(-m,0)+n$$

对所有 $n\geqslant0$ 成立．于是

$$\left|\frac{\theta(nm,0)}{nm}-\frac{\theta(m,0)}{m}\right|\leqslant\frac{1}{|m|}$$

对所有 n、$m\neq0$ 成立．交换 n、m 的地位，得知

$$\left|\frac{\theta(nm,0)}{nm}-\frac{\theta(n,0)}{n}\right|\leqslant\frac{1}{|n|}$$

对所有 n、$m\neq 0$ 成立. 利用三角不等式便得

$$\left|\frac{\theta(n,0)}{n}-\frac{\theta(m,0)}{m}\right|\leqslant\frac{1}{|n|}+\frac{1}{|m|},$$

于是 ρ 存在, 且对于所有 m 有 $|\rho-\theta(m,0)/m|\leqslant 1/|m|$.

现在给出(ii)的另一个证明.

读者如果愿意, 可以直接读本定理证明的第(iii)部分. 这个证明的想法用另一个例子能最好说明. (ϕ, θ)平面的通过原点的直线 L 的斜率由此直线区分整数对(m,n)的方式所唯一确定. 比较具体地说, 如果 R_0 是在 L 下侧的整数对(m, n)所成的有理数 n/m 的集合, 而 R_1 是在 L 上侧的整数对(m, n)所成有理数的集合, 则可以证明所有的有理数除开可能有一个例外, 包含在 R_0 或 R_1 内, $R_0\cap R_1=\phi$, 而由 R_0 与 R_1 所决定的剖线便定义一个实数, 它是问题中直线的斜率.

这个想法同样可用于证明旋转数 ρ 存在. 设 $L(m,n)$是(2.3)在(ϕ,θ)平面内通过点(m,n)的轨道, 又令 $L=L(0,0)$. 除开一个平移以外, 曲线 $L(m,n)$与 L 是相同的. 设 $\theta(\phi, m, n)$是(2.3)满足 $\theta(m,m,n)=n$ 的解, 如果 $\theta(0,m,n)>0$, 我们说 $L(m,n)$在 L 上侧, 如果 $\theta(0,m,n)<0$, 则说 $L(m,n)$在 L 下侧. 根据唯一性, 这显然等价于说如果 $\theta(\phi,m,n)>\theta(\phi, 0, 0)$($<\theta(\phi, 0, 0)$)则 $L(m,n)$在 L 的上(下)侧. 如果 $L(m,n)$在 L 上侧, 则对于任何正整数, $L(km,kn)$也在 L 上侧. 事实上, 由于通过平移(m,n), L 变为 $L(m,n)$而 $L(m,n)$变为 $L(2m, 2n)$, 故 $L(2m, 2n)$在 $L(m,n)$上侧. 一个归纳过程便给出了结果. 对同样的曲线 L 与 $L(m, n)$实行平移$(-m, -n)$, 可见如果 $L(m,n)$在 L 上侧, 则$L(-m, -n)$在 L 下侧, 一般地对 $k>0$, $L(-km, -kn)$在 L 下侧. 这些都说

明情况与前面的剖分为 R_0 与 R_1 时没有不同之处. 就是说，如果 $L(m, n)$ 在 L 的下(上)侧，则 n/m 属于 $R_0(R_1)$. R_0 与 R_1 都是非空的类，这是因为如果 $n>0$ 充分大，则 $L(1,n)$ 在 L 上侧，$L(1, -n)$ 在 L 下侧. 如果 n/m 不在 R_0 内，而 $s/r>n/m$，则 s/r 在 R_1 内. 事实上，$L(rm, rn)$ 或在 L 上侧或与 L 重合，而 $L(rm, sm)$ 又在 $L(rm, rn)$ 上侧，这是由于 $L(rm, sm)$ 可从 $L(rm, rn)$ 通过平移 $(0, sm-rn)$ 得到，而 $sm-rn>0$. 于是 $L(rm, sm)$ 在 L 上侧，由此推知 $rm/sm=r/s$ 属于 R_1. 相似地，如果 n/m 不在 R_1 内，而 $s/r<n/m$，则 s/r 在 R_0 内. 于是，所有的有理数除开可能有一个例外，包含在 R_0 或 R_1 内，而由 R_0 与 R_1 确定了一个实数 ρ.

尚须证明 ρ 是定理中所定义的旋转数. 假设 m 是给定的整数，又令 n 为最大的使 n/m 在 R_0 内的整数. 则 $n\leqslant\rho m\leqslant n+1$，而 $L(m,n)$ 的每个点在 L 下侧，$L(m, n+1)$ 的每个点不在 L 下侧. 于是，由 $L(m,n)$ 上的点是 $(\phi+m, \theta(\phi, 0)+n)$ 得

$$\theta(\phi, 0)+n<\theta(\phi+m, 0)\leqslant\theta(\phi, 0)+n+1.$$

特别对 $\phi=0$ 有

$$n<\theta(m, 0)\leqslant n+1,$$

而且

$$\left|\frac{\theta(m,0)}{m}-\rho\right|\leqslant\left|\frac{n}{m}-\rho\right|+\frac{1}{|m|},$$

可以取有理数序列 n/m，$|m|\to\infty$，来近似 ρ，使得对于某个常数 κ 有 $|\rho-n/m|<\kappa/|m|$. 于是

$$\left|\frac{\theta(m,0)}{m}-\rho\right|\leqslant\frac{\kappa+1}{|m|}.$$

由此显然可推出

$$\rho=\lim_{|m|\to\infty}\frac{\theta(m,0)}{m}.$$

(iii) 如果 T 的某些幂有不动点，则 ρ 是有理数. 事实上，如

果存在整数m与$\xi\in[0,1)$使得$T^m\xi=\xi$，则还存在整数k使得$\theta(m,\xi)=\xi+k$. 由于$\rho=\lim\limits_{|m|\to\infty}\frac{\theta(m,\xi)}{m}$存在，我们有

$$\rho=\lim_{|n|\to\infty}\frac{\theta(nm,\xi)}{nm}=\lim_{|n|\to\infty}\frac{\xi+nk}{nm}=\frac{k}{m},$$

故ρ是有理数.

(iv) 如果ρ是有理数，则T的某些幂有不动点. 假设$\rho=k/m$, k、m为整数且$m>0$，又设T^m没有不动点. 于是对于每个ξ, $0\leqslant\xi\leqslant1$有$\theta(m,\xi)\neq\xi+k$. 如果我们假设对于$\xi\in[0,1)$有$\theta(m,\xi)>\xi+k$，则存在$a>0$使得$\theta(m,\xi)-\xi-k\geqslant a>0$. 对于任意$\zeta\in(-\infty,\infty)$，存在整数$p$与$\xi\in[0,1)$使得$\zeta=p+\xi$. 由关系式(2.5)推知$\theta(m,\zeta)-\zeta-k\geqslant a$对所有$\zeta\in(-\infty,\infty)$成立. 反复利用这个不等式，便得知$\theta(rm,\xi)-\xi\geqslant r(k+a)$对任意整数$r$成立. 除以$rm$并令$r\to\infty$，便得$\rho\geqslant k/m+a/m$，这和$\rho=k/m$矛盾. 这就完成了定理的证明.

推论 2.1. 在对θ满足 Lipschitz 条件的一类函数$A(\phi,\theta)$中，(2.3)的旋转数$\rho=\rho(A)$随A连续地变动；也就是说，对于任意$\varepsilon>0$与A，存在$\delta>0$，使得如果$\max\limits_{0\leqslant\phi,\theta\leqslant1}|A(\phi,\theta)-B(\phi,\theta)|<\delta$就有$|\rho(A)-\rho(B)|<\varepsilon$.

证明 如果用$\theta_A(\phi,0)$与$\theta_B(\phi,0)$分别记(2.3)右边为A与B时的解，$z(\phi)=\theta_A(\phi,0)-\theta_B(\phi,0)$，又$L$是$A$的Lipschitz 常数，则

$$\frac{dz}{d\phi}=[A(\phi,z(\phi)+\theta_B(\phi,0))-A(\phi,\theta_B(\phi,0))]$$
$$-[B(\phi,\theta_B(\phi,0))-A(\phi,\theta_B(\phi,0))],$$

又对于所有ϕ有

$$D_r|z|\leqslant\left|\frac{dz}{d\phi}\right|\leqslant L|z|+\sup_{0\leqslant\phi,\theta\leqslant1}|B(\phi,\theta)-A(\phi,\theta)|,$$

于是对于所有 ϕ 有

$$|\theta_A(\phi,0)-\theta_B(\phi,0)|\leqslant L^{-1}e^{L\phi}\sup_{0\leqslant\phi,\theta\leqslant 1}|B(\phi,\theta)-A(\phi,\theta)|.$$

在定理 2.1 的证明的第(ii)部分中，得到了序列 $\theta_A(m,\ 0)/m$ 趋于旋转数 $\rho(A)$ 的速率的估计值，即对所有 m 有 $|\theta_A(m,\ 0)/m-\rho(A)|<1/|m|$. 因此对所有整数 m 有

$$\begin{aligned}|\rho(A)-\rho(B)|\leqslant&\left|\rho(A)-\frac{\theta_A(m,0)}{m}\right|\\&+\left|\frac{\theta_A(m,0)-\theta_B(m,0)}{m}\right|\\&+\left|\frac{\theta_B(m,0)}{m}-\rho(B)\right|\\\leqslant&\frac{2}{|m|}+\left|\frac{\theta_A(m,0)-\theta_B(m,0)}{m}\right|.\end{aligned}$$

对于任意 $\varepsilon>0$, 选取 $|m|$ 甚大以致 $\frac{1}{|m|}<\frac{\varepsilon}{3}$. 又对于任何这样选出并且固定了的 m, 选取 $\delta>0$ 使得如果 $\max_{0\leqslant\phi,\theta\leqslant 1}|A(\phi,\theta)-B(\phi,\ \theta)|<\delta$ 就有 $|\theta_A(m,0)-\theta_B(m,0)|\leqslant 1$. 这个事实与前面的不等式在一起就证明了结果.

推论 2.1 的结论在不假设 $A(\phi,\ \theta)$ 对 θ 满足 Lipschitz 条件时实际上仍是正确的. 要证明它，必须用定理 I.3.4 的加强形式，它在假设解是唯一的条件下断言微分方程的解对于向量场具有连续依赖性. 证明这个断言是一个有意义的习题.

定理 2.2. 如果旋转数 ρ 是有理数，则(2.3)在环面上的每条轨道或者是闭曲线或者趋于闭曲线.

证明 (Peixoto). 由于 ρ 是有理数，在 $\mathscr{T}$ 上存在与 $\mathscr{T}$ 的每条子午线相交的闭轨道 γ. 因此，$\mathscr{T}\backslash\gamma$ 拓扑等价于一个环域 Γ. $\mathscr{T}\backslash\gamma$ 上的微分方程 (2.3) 等价于 Γ 上的平面微分方程. 由于没有平衡点，从 Poincaré-Bendixson 定理与定理 1.2 便得本定理的

结论.

本章下面的内容是讨论旋转数 ρ 是无理数时 (2.3) 的轨道的特性.

设 T: $C\to C$ 是由 (2.3) 引出的把 $\mathscr{T}$ 上子午线 C 映入自身的映射. 对于 C 内任意 P, 令

$$D(P)=\{T^nP, n=0, \pm1, \pm2, \cdots\}.$$

又设 $D'(P)$ 为 $D(P)$ 的极限点集合. 又设 $\varnothing$ 是空集.

引理 2.1. 假设 ρ 是无理数, m 与 n 是给定的整数, P 是 C 内的给定点, 而 α 与 β 是 C 的闭弧, 满足 $\alpha\cap\beta=\{T^mP,\ T^nP\}$, $\alpha\cup\beta=C$. 则 $D(Q)\cap\alpha^0\neq\varnothing$ 与 $D(Q)\cap\beta^0\neq\varnothing$ 对于 C 内每个 Q 成立, 这里的 α^0 与 β^0 分别是 α 与 β 的内部.

证明 集合 $\bigcup\limits_k T^{k(m-n)}\alpha^0$ 覆盖了 C. 因为如果不这样, 序列 $\{T^{k(m-n)}(T^nP)\}$ 将趋于极限 P_0 且 $T^{(m-n)}P_0=P_0$, 根据定理 2.1, 就得到与 ρ 是无理数相矛盾的结论. 结果对于任何 C 中的 Q 而言, 存在整数 p 使得 Q 在 $T^{p(m-n)}\alpha^0$ 内; 即 $T^{p(n-m)}Q$ 在 α^0 内, 而且 $D(Q)\cap\alpha^0\neq\varnothing$. 同样的议论可用于 β.

定理 2.3. 如果 ρ 是无理数, 则 $D'(P)=F$ 对所有 P 是相同的, $TF=F$, 并且或者

(i) $F=C$(各态历经情形)

或者

(ii) F 是无处稠密的完备集.

证明 如果 S 属于 $D'(P)$, 则存在序列 $\{P_k\}\subset D(P)$, 当 $k\to\infty$ 时 P_k 趋于 S. 对于这个序列的任意点 P_k 与 P_{k+1} 和 C 内的 Q, 根据引理 2.1 知存在整数 n_k 使得 $T^{n_k}Q$ 属于在 C 上联结这两点的弧 α、β 中较短者. 于是当 $k\to\infty$ 时 $T^{n_k}Q\to S$, 并且 $D'(P)\subset D'(Q)$. 同样的议论显然可得 $D'(Q)\subset D'(P)$, 这就证明了定理的第一个结论.

如果Q在F内，则存在序列n_k与P使得当$k\to\infty$时$T^{n_k}P\to Q$。由此显然可推出TQ属于F与$T^{-1}Q$属于F. 故$TF=F$.

如果R是F的任意元素，则由$F=D'(Q)$对每个Q成立这一事实推知对任意$Q\in F$存在整数n_k的序列使得$T^{n_k}Q\to R$. 于是，F的极限点集是F本身，故F是完备集.

假设F包含C的一段闭弧γ，则γ包含端点为T^nP与T^mP的闭子弧，这里n、m是某两个整数，P是C内某元素. 于是由引理2.1知$\bigcup_k T^k\alpha$覆盖C，而且由于$T\alpha$，$T^2\alpha$，…属于F，我们得知$F=C$. 这就证明了定理.

我们的下一个目的是求出保证T是各态历经的充分条件，即保证T的迭代极限集F是C的充分条件.

令$P_n=T^nP$, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$. 如果ρ是无理数，而α是C的以P作为一个端点的任意闭弧，从引理2.1可推知存在整数n，使得对于$|k|\leqslant n$，在α的内部α^0的P_k只可能是P_n或P_{-n}. 由于T的任何幂都没有不动点，故对于任意$N>0$，可以把α取得甚小，使得$n\geqslant N$. 为了确定起见，假设P_{-n}在α^0内. 令P_0P_{-n}记C的端点为P_0与P_{-n}的弧，它也属于α. 我们对这段弧指定与C的定向相同的定向. 此外，令$P_kP_{k-n}(k=0, 1, \cdots, n-1)$记$C$的联接$P_k$与$P_{k-n}$的与$C$有相同定向的弧.

引理 2.2. $k=0,1,\cdots,n-1$时，各段弧P_kP_{k-n}不相交.

证明 如果结论不真，则在集合$\{-n, -n+1, \cdots, n-1\}$中有一个$l$，在$\{0,1,\cdots,n-1\}$中有一个$k$，使得$P_l$属于$P_kP_{k-n}$的内部$P_kP_{k-n}^0$. 于是从$T$的幂保持定向，得知$P_{l-k}$在$P_0P_{-n}^0$内. 但从$n$的取法知$-n\leqslant l-k<n$时，这是不可能的. 假设$-2n+1\leqslant l-k<n$. 由于$P_l$属于$P_kP_{k-n}^0$，推知$P_{l+n}P_l$与$P_kP_{k-n}$相交，特别地说，$P_k$在$P_{l+n}P_l^0$内. 于是$P_{k-n-l}$在$P_0P_{-n}^0$内，由于$0<k-l-n$

$<n$，这是不可能的．这就证明了引理．

定理 2.4. 令 $\psi(\xi)=\theta(1,\xi)$，$0\leqslant\xi\leqslant1$．如果 ρ 是无理数，而 ψ 有连续的一阶导数 $\psi'>0$，且 ψ' 是有界变差函数，则 T 是各态历经的．

证明 取 $\psi^{-1}(\xi)$ 为 $\psi^0(\xi)=\psi(\psi^{-1}(\xi))$ 的唯一解，这里的 $\psi^0(\xi)=\xi$，又递归地定义 $\xi_k=\psi^k(\xi)$，$k=0,\pm1,\cdots$．于是 $T^kP=(0,\psi^k(\xi))$，$P=(0,\xi)$．根据微商的乘积法则，我们有

$$\frac{d\psi^k(\xi)}{d\xi}=\prod_{j=0}^{k-1}\psi'(\xi_j),\quad \frac{d\psi^{-k}(\xi)}{d\xi}=\left[\prod_{j=0}^{k-1}\psi'(\xi_{j-k})\right]^{-1},$$

这里的 $\psi'(\xi)=d\psi(\xi)/d\xi$．假设 P 与 n 是像引理 2.2 之先所选定的．由于 $P_kP_{k-n}(k=0,1,\cdots,n-1)$ 不相交，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\ln\left(\frac{d\psi^n(\xi)}{d\xi}\,\frac{d\psi^{-n}(\xi)}{d\xi}\right)\right|\\&=\left|\ln\left(\prod_{j=0}^{n-1}\psi'(\xi_j)\right)-\ln\left(\prod_{j=0}^{n-1}\psi'(\xi_{j-n})\right)\right|\\&=\left|\sum_{j=0}^{n-1}[\ln\psi'(\xi_j)-\ln\psi'(\xi_{j-n})]\right|\leqslant V,\end{aligned}$$

这里的 V 是 $\ln\psi'$ 的全变差．从对于 ψ' 的假定得知 $\ln\psi'$ 是有界变差函数．故

$$e^{-V}\leqslant\frac{d\psi^n(\xi)}{d\xi}\,\frac{d\psi^{-n}(\xi)}{d\xi}\leqslant e^V$$

对 n 与 ξ 一致地成立．

假设 α 是 C 上长度为 δ 的任意一段弧．如果 δ_k 是 $T^k\alpha$ 的长度，则

$$\delta_k+\delta_{-k}=\int_\alpha\left(\frac{d\psi^k}{d\xi}+\frac{d\psi^{-k}}{d\xi}\right)d\xi\geqslant2\int_\alpha\left(\frac{d\psi^k}{d\xi}\,\frac{d\psi^{-k}}{d\xi}\right)^{\frac12}d\xi\geqslant2\delta e^{-\frac{V}{2}},$$

故当 $k\to\infty$ 时 $\delta_k+\delta_{-k}$ 不趋于 0．

如果 $C\setminus F$ 不是空集(即 T 不是各态历经的)，我们在 $C\setminus F$ 内取一端点在 F 内的开弧. 这是能做到的，因为 F 是无处稠密且完备的集合. 由于 $TF=F$ 且 T 保持定向，所有的弧 $T^k\alpha(k=0,\pm1,\cdots)$ 都在 $C\setminus F$ 内. 由于这些弧的端点都在 F 内，又如果它们的端点有一致的，它就对应着 T 的某次幂的不动点，所以当 $k\neq j$ 时 $T^k\alpha\cap T^j\alpha=\varnothing$. 于是由 C 的紧性得知 $k\to\infty$ 时 $\delta_k+\delta_{-k}\to0$. 由这个矛盾推知 $C\setminus F$ 是空集，定理就证明了.

说明 如果(2.3)中的 $A(\phi,\theta)$ 对 θ 的一、二阶偏导数连续，定理 2.4 中关于 ψ 的光滑性假设就得到满足. 事实上，从定理I.3.3与习题 I.3.2 推知 $\psi'(\xi)$、$\psi''(\xi)$ 连续，特别是 $\psi'(\xi)$ 对于 $0\leqslant\xi\leqslant1$ 为有界变差函数. 此外，从定理 I.3.3 还可得知 $\partial\theta(\phi,\xi)/\partial\xi$ 是纯量方程

$$\frac{dy}{d\phi}=\frac{\partial A(\phi,\theta)}{\partial\theta}y$$

的解，在 $\phi=0$ 的初始值是 1. 因此，当 $0\leqslant\xi\leqslant1$ 时，$\psi'(\xi)=\partial\theta(1,\xi)/\partial\xi>0$.

Denjoy 在[1]中用例子说明，如果关于 ψ 的光滑性条件放松，定理 2.4 便错了.

至今还没有方法确定(2.3)的旋转数 ρ 关于函数 $A(\phi,\theta)$ 的显式依赖关系，特别是断言 ρ 是否有理数. 然而，Denjoy 的结果却是触目的，它说明了光滑性在消除微分方程的病态中的重要性.

假设记号与定理 2.4 及其证明中相同.

引理 2.3. 如果 ρ 是无理数，而 ξ 是固定的实数，记 $\xi_n=\psi^n(\xi)$，n 为整数，则 $g(\xi_n+m)=n\rho+m$ 是实数序列 $\{\xi_n+m\}$ 的增函数，这里的 m 也是整数.

证明 在下面的证明过程中，n、m、r、s 都是整数. $\{\xi_n+m\}$ 的元素的序不依赖 ξ；即从 $\xi_n+m<\xi_r+s$ 推知 $\zeta_n+m<\zeta_r+s$ 对任

意ξ成立. 这等价于说从$\xi_n-\xi_r<s-m$推知$\zeta_n-\zeta_r<s-m$对任意ζ成立. 如果这不正确, 将存在数η以致$\eta_n-\eta_r$是整数. 这又意味着T的某次幂有不动点, 与ρ为无理数的事实相矛盾. 所以, 只需取$\xi=0$便行了.

回忆$\psi^m(0)=\theta(m,0)$. 如果$p\leqslant\theta(m,0)\leqslant r$, 则由反复应用(2.6), 得知

$$\theta(m,0)+(k-1)p\leqslant\theta(km,0)\leqslant\theta(m,0)+(k-1)r$$

对任意整数$k>0$成立. 于是

$$\frac{\theta(m,0)}{k}+\left(1-\frac{1}{k}\right)p\leqslant m\frac{\theta(km,0)}{km}\leqslant\frac{\theta(m,0)}{k}+\left(1-\frac{1}{k}\right)r.$$

取$k\to\infty$的极限, 得$p\leqslant m\rho\leqslant r$. 由于$\rho$是无理数, $p<m\rho<r$.

今假设$\theta(n,0)+m<\theta(r,0)+s$, 即$\theta(n,m)<\theta(r,s)$. 于是$\theta(n-r,m)<\theta(0,s)$或$\theta(n-r,0)+m<s$. 根据前一段知$\rho(n-r)<s-m$或$\rho n+m<\rho r+s$, 这就是要证明的.

定理 2.5. 如果T是各态历经的, 旋转数是无理数ρ, 则T拓扑等价于圆C按角$2\pi\rho$的旋转; 即存在C到C的同胚G, 使得$GT=RG$, 这里的R是C经过角$2\pi\rho$的旋转.

证明 令g为引理2.3中定义的增函数, $A=\{n\rho+m\}$, $B=\{\xi_n+m\}$, n、m为整数. 由于T是各态历经的, B在实数中稠密. 又由于ρ是无理数, A在实数中也稠密. g是从B到A的连续函数. 由于B稠密, g可以唯一地并且保持连续、递增性质地扩充到全体实数. 我们仍记这个函数为g,

如果$\eta=\xi_n+m$, $g(\eta)=n\rho+m$, 则

$$g(\eta+1)=n\rho+m+1=g(\eta)+1,$$

$$\begin{aligned}g(\psi(\eta))&=g(\psi(\xi_n+m))=g(\psi(\xi_n)+m)=g(\xi_{n+1}+m)\\&=(n+1)\rho+m=g(\eta)+\rho\end{aligned}\tag{2.7}$$

由于B稠密及g连续, 得知对所有实数η, $g(\eta+1)=g(\eta)+1$,

$g(\psi(\eta))=g(\eta)+\rho$. 由 $G(\eta)=g(\eta)$, $0\leqslant\eta<1$ 定义了同胚 G: $C\to C$. 从关系式 $g(\psi(\eta))=g(\eta)+\rho$ 推知 $GT=RG$, 定理证毕.

定理 2.6. (Bohl) 如果 T 是各态历经的, 则存在函数 $\omega(y, z)$, 它对 y、z 连续, 并且对所有 y, z 满足

$$\omega(y+1, z)=\omega(y, z+1)=\omega(y, z),$$

并且使得(2.3)的每个解 θ 适合

$$\theta(\phi)=\rho\phi+c+\omega(\phi, \rho\phi+c), \tag{2.8}$$

这里的 c 是常数, ρ 是旋转数. 反过来, 对于任意常数 c, 由(2.8)给出的 $\theta(\phi)$ 满足 (2.3). $[0, 1)$ 中每个 c 对应着唯一的 $\theta(0)$ (mod1).

证明 设 ξ 是任意实数, 而 $\theta(\phi, \xi)$ 是(2.3)的适合 $\theta(0, \xi)=\xi$ 的解. 我们知道

$$\theta(\phi, \xi+1)=\theta(\phi, \xi)+1,$$
$$\theta(\phi+1, \xi)=\theta(\phi, \psi(\xi)),$$

这里的 $\psi(\xi)=\theta(1, \xi)$, 与前面一样. 令 g 是定理 2.5 的证明中给定的函数, 又令 h 记 g 的逆. 从 g 的性质(2.7), 我们有

$$h(c+1)=h(c)+1,$$
$$\psi(h(c))=h(c+\rho).$$

如果 $\bar{\theta}(\phi, c)=\theta(\phi, h(c))$, 则有

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\phi, c+1)&=\theta(\phi, h(c+1))=\theta(\phi, h(c)+1)\\&=\theta(\phi, h(c))+1=\bar{\theta}(\phi, c)+1,\end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\phi+1, c)&=\theta(\phi+1, h(c))=\theta(\phi, \psi(h(c)))\\&=\theta(\phi, h(c+\rho))=\bar{\theta}(\phi, c+\rho).\end{aligned}$$

如果对所有实数 y、z, 令 $\omega(y, z)=\bar{\theta}(y, z-\rho y)-z$, 则容易看出 $\omega(y, z+1)=\omega(y+1, z)=\omega(y, z)$, 于是

$$\theta(\phi, h(c))\xlongequal{\text{def}}\bar{\theta}(\phi, c)=\rho\phi+c+\omega(\phi, \rho\phi+c),$$

定理证明了.

习题 2.1. 下面所有的函数对 θ、ϕ 连续、周期为 1, 并且足够地光滑以致方程对任意初始值有唯一解.

(a) $d\theta/d\phi=\sin 2\pi\theta$ 的旋转数是什么?

(b) 如果 $|g(\theta)|\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 1, d\theta/d\phi=\sin 2\pi\theta+g(\theta)$ 的旋转数是什么?

(c) 利用 Poincaré-Bendixson 定理, 证明如果 $|\varepsilon|$ 足够小, $d\theta/d\phi=\sin 2\pi\theta+\varepsilon g(\theta,\phi)$ 的旋转数是有理数.

(d) 利用 Brouwer 不动点定理与在(c)中的作法, 说明(c)中的方程的旋转数当 $|\varepsilon|$ 足够小时是零.

习题 2.2. 假设 ω 是无理数. 对于任意 $\varepsilon>0$, 证明存在函数 $g(\theta,\phi)$, 对 θ、ϕ 连续、周期为 1, 使得 $\max\{|g(\theta,\phi)|, 0\leqslant\theta, \phi\leqslant 1\}<\varepsilon$, $d\theta/d\phi=\omega+g(\theta,\phi)$ 的旋转数是有理数, 又不是所有的轨道都是环面上的闭曲线. 提示: 选取整数序列 $\{p_k\}$、$\{q_k\}$, 当 $k\to\infty$ 时 $q_k\to\infty$, 以致对某个常数 γ 有 $|\omega-p_k/q_k|<\gamma/q_k^2$, 又对于适当的常数 a、b、c 考虑 $g(\theta,\phi)=a\sin 2\pi(b\theta+c\phi)$.

习题 2.3. 在习题 2.1 中, 向量场的任何小改变都不引起旋转数改变, 而在习题 2.2 中, 向量场的适当的小改变确实引起旋转数的改变. 你能解释这是为什么吗? 你能对方程 (2.3) 给出关于旋转数的与习题 2.1 和 2.2 相同的性质的一般结论吗? 你能说出在所有的向量场(2.3)中最典型的特性是什么?

习题 2.4. (a) 对于任何周期为 1 的连续函数 $f(\phi)$, 证明方程 $d\theta/d\phi=2\pi\theta+f(\phi)$ 有唯一周期解, 其周期为 1. (提示: 试看

$$\int_{\infty}^{\phi} e^{2\pi(\phi-s)}f(s)\,ds)$$

(b) 记这个唯一解为 Kf. 如果 P 是周期为 1 的连续函数组成的, 具有一致收敛的拓扑的 Banach 空间, 证明 $K:P\to P$ 是连

续、线性映射.

(c) 假设 $g(\theta,\phi)$ 对 θ、ϕ 连续，周期为 1，又对 θ 满足 Lipschitz 条件. 利用压缩原理与 (b)，证明存在 $\varepsilon_0>0$，以致方程 $d\theta/d\phi=2\pi\theta+(\sin 2\pi\theta-2\pi\theta)+\varepsilon g(\theta,\ \phi)$ 当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时有对 ϕ 周期为 1 的解.

Ⅱ.3. 对进一步学习的说明与建议

二维系统一般理论的更多细节，请见 Hartman[1]、Lefschetz[1]、Sansone 与 Conti[1]. Sansone 与 Conti [1] 这本书还包含有 Poincaré-Bendixson 理论对于二阶自治方程周期解存在性的大量应用. 按照习题 1.4 与 1.5 的想法加以引伸，来找非自治系统的周期解，请见 Cartwright[1]、Levinson[1]、Lefschetz[1]、Sansone 与 Conti[1]. 在 Olech[1] 中给出了平面内原点整体稳定性的有意义的讨论.

对于平面内的二维系统，已得到的一个结果是紧最小集只可能是点与闭曲线. 而对于环面上的无奇异性"光滑"向量场，在环面上的最小集只可能是闭曲线与环面本身. 一个多年未曾解决的问题是刻划在任意紧二维流形上"光滑"向量场的最小集，Schwartz[1]解决了它，他证明了可能出现的最小集只有点、闭曲线与环面，而后者仅当流形本身是环面时才成为可能.

对于 n 维情形，难提出具有像本章给出那样完美的解答的问题. 有一个被研究得详细的问题产生于较细心地研究定理 2.5 与 2.6. 考虑 n 维环面上的微分方程

$$\dot{x}=f(x),$$

这里的 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$f(x_1,\cdots,x_n)$ 对每个变量的周期是 1. 问题：什么时候存在变量代换 $x=g(y)$ 使得对于 y 的新方程是 $\dot{y}=\omega$，这里 ω 是 n 维常向量？如果存在这种变换，引出的流便容易分析，而

有定理 2.6 的一个推广. 对于 $f(x)=\omega+\epsilon h(x)$, 这里 ϵ 是小的数,而 ω 是某一类无理数, 沿着这条线索有若干结果可用 (见Arnol'd[1]). 证明的方法现时是研究天体力学稳定性的重要工具 (见 Kolmogorov[1]. Arnol'd[2]、Moser[1]).

在第 1 节中,讨论了参数 k 很大的 van der Pol 方程(1.7). 利用由(1.8)表示的坐标显然可以看出,渐近稳定周期轨道有这样的性质: 系统先是在靠近某给定曲线时以适当的步调沿着轨道运动,然后很快地离开这曲线. 这种松弛振动在应用中很重要, 读者可以参考 van der Pol[1, 2]、LaSalle[1]、Minorsky[1]、Pontryagin 与 Mishchenko[1]

第 III 章　线性系统与线性化

在上一章里，得到了二维自治系统解的许多定性知识，但未用到向量场的特别性质. 在高维甚或二维系统中，想要得到比较具体的知识，就必须凭借这样一些方法，它们较带解析性，并且只在解的邻域或解的不变集内产生有关的信息.

如果 $\phi(t)$是

$$\dot{x}=f(x) \tag{1}$$

的解，这里的 f 有连续的一阶导数，则在(1)中令 $x=\phi(t)+y$，得

$$\dot{y}=A(t)y+g(t,y), \tag{2}$$

这里 $A(t)=\partial f(\phi(t))/\partial x$，而 $g(t,0)=0$, $\partial g(t,0)/\partial y=0$. 很自然就要研究线性方程

$$\dot{z}=A(t)z \tag{3}$$

并且探讨(3)的解 z 与(2)的解 y 之间在 $y=0$ 的邻域内的关系. 比较具体地说，线性方程(3)在 $y=0$ 附近是否方程(2)一个好的"近似"？本章考虑若干这类型的问题.

比较明确地说，第 1 节叙述一般线性系统的理论，第 2 节描述线性系统稳定性的概念并说明在特殊的扰动之下稳定性得以保存. 第 3 节专述 n 阶方程的一般理论. 在第 4 节中用初等函数描述线性自治系统的基本解，而在第 5 节中讨论二维系统的相图. 第 6 节介绍这样的自治系统(2)，其中矩阵 A 没有特征值是纯虚数. 在这一节里说明，在 $y=0$ 附近线性方程与非线性方程的解之间有许多定性的性质相同. 第 7 节对于周期系数线性方程叙述包含 Floquet 表示在内的理论. 第 8，9 与 10 节介绍几类特殊的周期系数线性方程的稳定性理论.

Ⅲ.1. 一般线性系统

考虑 n 个一阶方程的线性系统

$$\dot{x}_j=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(t)x_k+h_j(t),\quad j=1,2,\cdots,n. \tag{1.1}$$

这里的 a_{jk} 与 $h_j(j,k=1,2,\cdots,n)$ 都是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的实值或复值连续函数. 用矩阵记号可把(1.1)写成比较紧凑的形式

$$\dot{x}=A(t)x+h(t), \tag{1.2}$$

这里 $A=(a_{jk}),j,k=1,2,\cdots,n;h=(h_1,\cdots,h_n)^T$ 即 h 是 $(h_1,\cdots,h_n)$ 的转置列向量. 形如(1.2)的线性系统的基本特性是叠加原理: 如果 x 是(1.2)的对应于"强迫函数"或"输入量" h 的解, 而 y 是对应于 g 的解, 则对于任意实数或复数 c 与 d, $cx+dy$ 是对应于强迫函数或输入量 $ch+dg$ 的解.

直接计算便可验证这个原理.

特别如果 $c=-d=1$, $h=g$, 则由 x 与 y 是(1.2)的对应于强迫函数 h 的解推知 $x-y$ 是齐次方程

$$\dot{x}=A(t)x \tag{1.3}$$

的解. 如果 $\phi(t,c)$ 是齐次方程(1.3)的通解, 而 $x_p(t)$ 是(1.2)的任意特解, 则由上面这个性质得知(1.2)的任何解可以表示成 $\phi(t,c)+x_p(t)$, 其中 c 是某个常数向量. 下面我们从理论上说明怎样求(1.3)的通解, 然后指出(1.2)的特解可以从关于(1.3)的通解的知识及计算积分来求得.

根据(1.2)的系数矩阵 A 及强迫函数 h 的性质, 从第Ⅰ章的基本存在性与唯一性定理, 推知(1.2)的初始值问题在包含初始时刻的某区间上有唯一解. 定理Ⅰ.6.2还断言(1.2)的每个解都存在于无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上.

一组向量 $x^1,\cdots,x^n$ 称为线性无关, 如果对于任何复常数 c_j

$(j=1,\cdots,n)$，$\sum_{j=1}^{n}c_jx^j=0$ 意味着所有 $c_j=0$. 向量 $x^1,\cdots,x^n$ 称为线性相关，如果它们不是线性无关的. 下述引理的证明留作习题.

引理 1.1. 向量 $x^1,\cdots,x^n$ 线性无关，当且仅当 $\det[x^1,\cdots,x^n]\neq 0$.

如果 $n\times n$ 矩阵 $X(t)(t>0)$ 的每列满足(1.3)，就说它是(1.3)的一个 $n\times n$ 矩阵解. 如果 (1.3) 的 $n\times n$ 矩阵解 $X(t)$ 满足 $\det X(t)\neq 0$，它便是(1.3)的一个基本矩阵解. 在初始时刻 t_0 满足 $X(t_0)=I$(单位方阵)的基本矩阵解是(1.3)在 t_0 的主矩阵解. 将用 $X(t,t_0)$ 来记在 t_0 的主矩阵解。

从基本矩阵解的上述定义，显然知道，基本矩阵解简单地说就是(1.3)的 n 列线性无关的矩阵解 $X(t)$. (1.3)的矩阵解有这样一个简单而又有用的性质

引理 1.2. 如果 $X(t)$ 是(1.3)的 $n\times n$ 矩阵解，则要末对所有 t 有 $\det X(t)\neq 0$，要末对所有 t 有 $\det X(t)=0$.

证明 如果存在实数 τ 使得矩阵 $X(\tau)$ 是奇异的，则有非零向量 c 使得 $X(\tau)c=0$. 对此向量 c，由(1.3)是线性方程推知函数 $x(t)=X(t)c$ 是(1.3)的解. 由于函数 $x=0$ 显然是方程的解，由唯一性推知对所有 $t\in(-\infty,\infty)$ 有 $X(t)c=0$，于是对所有 $t\in(-\infty,\infty)$ 有 $\det X(t)=0$. 证毕.

推论 1.1. 如果 X_0 是 $n\times n$ 非奇异矩阵，又如果 $X(t)$ 是(1.3)的满足 $X(0)=X_0$ 的矩阵解，则 $X(t)$ 是(1.3)的基本矩阵解.

推论 1.1 说明基本矩阵解的确定只包括选定 n 个线性无关的初始向量与求系统(1.3)与之相对应的 n 个线性无关的解. 由对所有 t 矩阵 $X(t)$ 非奇异这一事实产生了下述重要的.

引理 1.3. 如果 $X(t)$ 是(1.3)的任意基本矩阵解，则(1.3)的通解是 $X(t)c$，其中 c 是任意的 n 维向量.

证明 对于任意 n 维常向量 c，函数 $x(t)=X(t)c$ 显然是(1.3)的解．并且如果给定了 t_0 与 x_0，令 $c=X^{-1}(t_0)x_0$，则 $X(t)c$ 是(1.3)的通过点 (t_0, x_0) 的解．

引理 1.4. 如果 $X(t)$ 是(1.3)的基本矩阵解，则矩阵 $X^{-1}(t)$ 是伴随方程

$$\dot{y}=-yA(t) \tag{1.4}$$

的基本矩阵解，这里的 y 是 n 维行向量；也就是说，X^{-1} 的每一行满足(1.4)并且 $\det X^{-1}(t)\neq 0$．

证明 令 $Y(t)=X^{-1}(t)$．由 $YX=I$（单位方阵）推知 $\dot{Y}X+YAX=0$．由于 X 非奇异，这意味着 $Y=X^{-1}$ 是伴随方程(1.4)的矩阵解．这等价于说矩阵 X^{-1} 的每一行是(1.4)的解．X^{-1} 显然是非奇异的．

定理 1.1. 如果 X 是(1.3)的基本矩阵解，则(1.2)的每个解由公式

$$x(t)=X(t)\left[X^{-1}(\tau)x(\tau)+\int_{\tau}^{t}X^{-1}(s)h(s)ds\right] \tag{1.5}$$

给出，其中 τ 是 $(-\infty, \infty)$ 内的任意实数．

公式(1.5)叫作(1.2)的常数变易公式．理由是明显的，因为由它推知每个解的形式是 $X(t)c(t)$，其中 $c(t)$ 就是(1.5)的方括弧内的函数．这和由引理 1.3 给出的(1.3)的通解形式是相同的，只不过这里向量 c 与自变量 t 有关．

定理 1.1 的证明 如果把方程(1.2)改写作 $\dot{x}-Ax=h$，且利用 X^{-1} 是伴随方程(1.4)的矩阵解这一事实，则方程(1.2)等价于

$$\frac{d}{ds}[X^{-1}(s)x(s)]=X^{-1}(s)h(s).$$

对于任意实数 τ 与 t，从 τ 到 t 积分这个表示式，得到

$$X^{-1}(t)x(t)-X^{-1}(\tau)x(\tau)=\int_{\tau}^{t}X^{-1}(s)h(s)ds.$$

重新整理这个表达式的项，便得到方程(1.5)，这就证明了定理.

我们对这个定理再叙述一个证明. 由于对于每个 t，$X(t)$是非奇异的，推知对于每个 t，变量替换$x=X(t)y$ 定义了由 R^n 入 R^n 的同胚. 把这个变换用到(1.2)，则由引理 1.4 得

$$\dot{y}=\frac{d}{dt}[X^{-1}x]=X^{-1}(Ax+h)-X^{-1}Ax=X^{-1}h.$$

因为 $y(\tau)=X^{-1}(\tau)x(\tau)$，由此推得

$$y(t)=X^{-1}(\tau)x(\tau)+\int_\tau^t X^{-1}(s)h(s)ds.$$

再用公式 $x(t)=X(t)y(t)$便得到关系式(1.5).

如果对于$(-\infty,\infty)$内任意给定的 τ，令 $X(t,\tau)$记(1.3)在 τ 的主矩阵解(即 $X(\tau,\tau)=I$)，则对所有 t,τ,s 有

$$X(t,\tau)=X(t,s)X(s,\tau). \tag{1.6}$$

事实上，这个式子两边作为 t 的函数，都满足(1.3)，并且当 $t=s$ 时相等. 从唯一性便得到了上述结论. 利用这个公式可以简化常数变易公式；即得

$$x(t)=X(t,\tau)x(\tau)+\int_\tau^t X(t,s)h(s)ds. \tag{1.7}$$

引理 1.5. 如果 $X(t)$ 是 (1.3) 的 $n\times n$ 矩阵解，则对所有$(-\infty,\infty)$内的 t 与 t_0 有

$$\det X(t)=[\det X(t_0)]\exp\left(\int_{t_0}^t trA(s)ds\right), \tag{1.8}$$

这里的 trA 是 A 的对角线元素之和.

它的证明在指出 $\det X(t)$满足数量方程 $\dot{z}=[trA(t)]z$ 之后容易作出，因此留给读者作为习题.

上面的定理对于 $A(t)$，$h(t)$为可积的线性系统成立. 如果矩阵 $A(t)$的元素与 $h(t)$的分量只是在R的每个紧子集上 Lebesgue 可积，则由 I.5 节的结论推知(1.2)的初值问题有唯一解. 如果

$x(t)=x(t, t_0, x_0)$ $(x(t_0, t_0, x_0)=x_0)$ 是(1.2)的解，则只要 $x(t)$ 有定义，便有

$$|x(t)|\leqslant|x_0|+\int_{t_0}^{t}|h(s)|ds+\int_{t_0}^{t}|A(s)||x(s)|ds,\ t\geqslant t_0.$$

由推广了的 Gronwall 不等式(引理 I.6.2)推知

$$|x(t)|\leqslant\left(\exp\int_{t_0}^{t}|A(s)|ds\right)|x_0|$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left(\exp\int_{s}^{t}|A(u)|du\right)\left(\int_{t_0}^{s}|h(u)|du\right)ds$$

对于所有 $x(t)$ 有定义的 $t\geqslant t_0$ 成立. 解的延拓定理意味着 $x(t)$ 对 $t\geqslant t_0$ 有定义. 用 t_0-u 代替 t, 再利用相似的估计, 又可得对于 $t\leqslant t_0$ 而言 $x(t, t_0, x_0)$ 的存在性. 齐次方程(1.3)解的一般结构与常数变易公式的证明与前面恰好一样.

我们还需要某些关于微分方程(1.2)的解对于方程右边项的依赖性的估计. 假设在 R 的紧子集上, A, B 是 $n\times n$ 的可积矩阵函数, h, g 是 n 维可积向量函数, 考虑方程

$$\begin{aligned}&(a)\quad \dot{x}=A(t)x+h(t),\\&(b)\quad \dot{y}=B(t)y+g(t).\end{aligned}\tag{1.9}$$

如果 x, y 分别是(1.9a)、(1.9b)的解, 则 $x-y$ 满足方程

$$\dot{z}=Az+(A-B)y+h-g.$$

于是

$$\begin{aligned}&|x(t)-y(t)|\\&\leqslant|x(t_0)-y(t_0)|\\&\quad+\int_{t_0}^{t}[|A(s)||x(s)-y(s)|+|A(s)-B(s)||y(s)|\\&\quad+|h(s)-g(s)|]ds,\quad t\geqslant t_0.\end{aligned}$$

利用推广的 Gronwall 不等式(引理 I.6.2), 我们有

$$|x(t)-y(t)|\leqslant\left(\exp\int_{t_0}^{t}|A(s)|ds\right)|x(t_0)-y(t_0)|$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left(\exp\int_{s}^{t}|A(u)|du\right)[|A(s)-B(s)||y(s)|+|h(s)-g(s)|]ds. \tag{1.10}$$

特别如果 $X_A(t,t_0)(X_A(t_0,t_0)=I)$ 与 $X_B(t,t_0)(X_B(t_0,t_0)=I)$ 分别是 $\dot{x}=A(t)x$ 与 $\dot{y}=B(t)y$ 的基本矩阵解，则

$$\begin{aligned}&|X_A(t,t_0)-X_B(t,t_0)|\\ \leqslant&|\sup_{t_0\leqslant u<t}|X_B(u,t_0)|\\ &\times\left(\exp\int_{t_0}^{t}|A(s)|ds\right)\int_{t_0}^{t}|A(s)-B(s)|ds\end{aligned} \tag{1.11}$$

对所有 $t\geqslant t_0$ 成立. 从关系式(1.11)推知，$\dot{x}=Ax$ 的主矩阵解是定义在 $[0,t]$ 上的可积矩阵函数 A 按 $|A|=\int_0^t|A(s)|ds$ 的连续函数.

当线性系统包含一般的时变系数时，本节所陈述的内容实质上就包括了关于解的具体结构的理论. 但对于特殊的方程，可得到较多的细节知识. 对于常系数或周期系数的方程，我们知道了解的一般结构，在第 4 节与第 7 节中加以讨论.

Ⅲ.2. 线性与被扰动的线性系统的稳定性

在这一节里，对于线性系统表明稳定性的特征，并把结果用到被扰动的线性系统，我们首先注意到齐次线性方程任何解的稳定性是由零解的稳定性所确定的. 因此，对于线性系统(1.3)是可以说稳定、一致稳定的等等.

定理 2.1. 设 $X(t)$ 是(1.3)的基本矩阵解，而 β 是 $(-\infty,\infty)$ 内任意的数. 则系统(1.3)是

(i) 对于任意 $t_0\in(-\infty,\infty)$ 稳定，当且仅当存在 $K=K(t_0)>0$ 使得

$$|X(t)|\leqslant K,\quad t_0\leqslant t<\infty; \tag{2.1}$$

(ii) 对于 $t_0\geqslant\beta$ 一致稳定，当且仅当存在 $K=K(\beta)>0$ 使得

$$|X(t)X^{-1}(s)|\leqslant K,\quad t_0\leqslant s\leqslant t<\infty;\tag{2.2}$$

(iii) 对于任意 $t_0\in(-\infty,\infty)$渐近稳定，当且仅当

$$|X(t)|\to 0\quad 当\quad t\to\infty;\tag{2.3}$$

(iv) 对于 $t_0\geqslant\beta$ 一致渐近稳定，当且仅当它是指数渐近稳定；也就是说，存在 $K=K(\beta)>0,\alpha=\alpha(\beta)>0$ 使得

$$|X(t)X^{-1}(s)|\leqslant Ke^{-\alpha(t-s)},\quad \beta\leqslant s\leqslant t<\infty.\tag{2.4}$$

证明 (i)假设 t_0 是任意给定的实数并且(2.1)成立．任何解 $x(t)$满足 $x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0)$．设 $|X^{-1}(t_0)|=L$．则如果$|x(t_0)|<\varepsilon/KL$ 便有$|x(t)|\leqslant KL|x(t_0)|<\varepsilon$，故(1.3)的零解稳定．反之，如果对于任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta=\delta(\varepsilon,\ t_0)>0$ 使得当$|x(t_0)|<\delta$时$|X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0)|<\varepsilon$，则对于 $t\geqslant t_0$ 有

$$|X(t)X^{-1}(t_0)|=\sup_{|\xi|\leqslant 1}|X(t)X^{-1}(t_0)\xi|$$

$$=\sup_{|x(t_0)|\leqslant\delta}|X(t)X^{-1}(t_0)\delta^{-1}x(t_0)|\leqslant\varepsilon\delta^{-1}.$$

这就证明了(i)．

(ii) 如果 (2.2) 成立，则对于任意 $t_0\geqslant\beta$，由于总有 $x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0)$，故只要 $|x(t_0)|<\varepsilon/K$，便有 $t\geqslant t_0$时，$|x(t)|\leqslant K|x(t_0)|<\varepsilon$，这便是一致稳定性．反过来，只需注意 δ 与 t_0 无关，便可像(i)中那样来作．

(iii) 如果(2.3)成立，则对于任意 $t_0\in(-\infty,\ \infty)$，存在 $K=K(t_0)$使得 $t\geqslant t_0$ 时$|X(t)|\leqslant K$，而从(i)推得稳定性．由于 $x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0)$，我们有$t\to\infty$ 时$|x(t)|\to 0$．反过来则是平平常常的事．

(iv) 如果 (2.4) 成立，则从 (ii) 推知 (1.3) 一致稳定．假定 $|x(t_0)|\leqslant 1$．对于任意 $\eta>0,0<\eta<K$，令 $T=-\alpha^{-1}\log(\eta/K)$．则如果 $t\geqslant t_0+T,\ t_0\geqslant\beta$ 便有

$$|x(t)|=|X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0)|\leqslant Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x(t_0)|\leqslant\eta.$$

也就是说，(1.3)的零解一致渐近稳定.

反过来，假设解 $x=0$ 对于 $t_0\geqslant\beta$ 一致渐近稳定. 存在 $b>0$ 使得对于任意 $\eta(0<\eta<b)$，有 $T=T(\eta)>0$ 使得

$$|X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0)|<\eta, \tag{2.5}$$

对于

$$t\geqslant t_0+T,\ t_0\geqslant\beta,\ |x(t_0)|\leqslant b$$

成立. 于是对于 $t\geqslant t_0+T$, $t_0\geqslant\beta$ 有 $|X(t)X^{-1}(t_0)|<\eta b^{-1}$. 特别有

$$|X(t+T)X^{-1}(t)|<\eta b^{-1}<1,\quad t\geqslant\beta. \tag{2.6}$$

由于解 $x=0$ 一致稳定，我们从(ii)得知存在 $M=M(\beta)$ 使得

$$|X(t)X^{-1}(s)|\leqslant M,\ \beta\leqslant s\leqslant t<\infty.$$

假设

$$\alpha=-T^{-1}\log(\eta b^{-1}),$$
$$K=Me^{\alpha T}.$$

对于任意 $t\geqslant t_0$，存在整数 $k\geqslant 0$ 使得 $kT\leqslant t-t_0<(k+1)T$. 于是，利用(2.6)得

$$\begin{aligned}|X(t)X^{-1}(t_0)|&\leqslant|X(t)X^{-1}(t_0+kT)|\cdot|X(t_0+kT)X^{-1}(t_0)|\\&\leqslant M\cdot|X(t_0+kT)X^{-1}(t_0)|\\&\leqslant M(\eta b^{-1})|X(t_0+(k-1)T)X^{-1}(t_0)|\\&\leqslant M(\eta b^{-1})^k=Me^{-\alpha kT}\\&=Ke^{-\alpha(k+1)T}\leqslant Ke^{-\alpha(t-t_0)}.\end{aligned}$$

这便证明了(iv). 定理 2.1 证毕.

利用常数变易公式与 Gronwall 不等式(引理 I.6.6)，对于被扰动的线性系统很容易得到下述稳定性结论.

定理 2.2. 假设 β 被给定在 $(-\infty,\infty)$ 内，而系统(1.3)对于 $t_0\geqslant\beta$ 一致稳定. 如果 $n\times n$ 连续矩阵函数 $B(t)$ 满足

$$\int_\beta^\infty|B(t)|dt<\infty,$$

则系统

$$\dot{x}=[A(t)+B(t)]x \tag{2.7}$$

一致稳定.

证明 如果 $X(t)$是(1.3)的基本矩阵解，则由常数变易公式推知(2.7)的任意解有形式

$$x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}X(t)X^{-1}(s)B(s)x(s)ds, \tag{2.8}$$

它对所有$(-\infty,\infty)$内的 t、t_0 成立. 如果 $t_0\geqslant\beta$,则由定理 2.1 推知存在常数 $K=K(\beta)$使得对所有 $t\geqslant t_0$ 有 $|X(t)X^{-1}(t_0)|\leqslant K$. 因此,

$$|x(t)|\leqslant K|x(t_0)|+\int_{t_0}^{t}K|B(s)|\cdot|x(s)|ds,\quad t\geqslant t_0.$$

由 Gronwall 不等式推知

$$|x(t)|\leqslant K\left(\exp K\int_{\beta}^{t}|B(s)|ds\right)|x(t_0)|,\quad t\geqslant t_0.$$

这显然意味着(2.7)的一致稳定性即定理的结论成立.

定理 2.3. 假设β被给定在$(-\infty,\infty)$内，而系统(1.3)对 $t_0\geqslant\beta$ 一致渐近稳定. 如果 $n\times n$ 连续矩阵函数 $B(t)$ 对于某些常数 $\tau=\tau(\beta)$, $\gamma=\gamma(\beta)$满足

$$\int_{t_0}^{t}|B(s)|ds\leqslant\gamma(t-t_0)+\tau,\quad t\geqslant t_0\geqslant\beta. \tag{2.9}$$

则存在 $r>0$ 使得系统(2.7)当 $\gamma<r$ 时一致渐近稳定.

证明 如果 $X(t)$是(1.3)的基本矩阵解，而(1.3)对于 $t_0\geqslant\beta$ 一致渐近稳定，则由定理 2.1 推知存在常数 $K=K(\beta)>0$, $\alpha=\alpha(\beta)>0$ 使得(2.4)成立. 利用(2.8), 可看出(2.7)的解 $x(t)$满足

$$|x(t)|\leqslant Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x(t_0)|$$
$$+K\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha(t-s)}|B(s)|\cdot|x(s)|ds.\quad t\geqslant t_0.$$

如果 $z(t)=e^{\alpha t}|x(t)|$，由此不等式推知

$$z(t)\leqslant Kz(t_0)+\int_{t_0}^{t}K|B(s)|z(s)ds,\quad t\geqslant t_0.$$

应用 Gronwall 不等式与(2.9)，得

$$\begin{aligned}z(t)&\leqslant K\left(\exp K\int_{t_0}^{t}|B(s)|ds\right)z(t_0)\\&\leqslant K_1e^{K\gamma(t-t_0)}z(t_0),\ K_1=Ke^{Kr},\end{aligned}$$

而它又意味着 $t\geqslant t_0$ 时 $|x(t)|\leqslant K_1|x(t_0)|\exp[-(\alpha-K\gamma)(t-t_0)]$. 如果 $r=\alpha K^{-1}$ 且 $\gamma<r$，则系统(2.7)一致渐近稳定，定理证毕.

定理 2.4. 假设 β 被给定在 $(-\infty,\infty)$ 内，而系统(1.3)对 $t_0\geqslant\beta$ 一致渐近稳定. 如果对于 $R\times R^n$ 内的 (t,x)，$f(t,x)$ 连续，又对于任意的 $\varepsilon>0$，有 $\sigma>0$ 使得

$$|f(t,x)|<\varepsilon|x|\quad 对于 |x|<\sigma,\ t\in R,\tag{2.10}$$

则方程

$$\dot{x}=A(t)x+f(t,x)\tag{2.11}$$

的解 $x=0$ 对于 $t_0\geqslant\beta$ 一致渐近稳定.

证明 由系统(1.3)对于 $t_0\geqslant\beta$ 一致渐近稳定的假设，推知存在常数 $K=K(\beta)>0$，$\alpha=\alpha(\beta)>0$，使得(2.4)成立. (2.11)的任意解满足

$$x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}X(t)X^{-1}(s)f(s,x(s))ds.\tag{2.12}$$

选取 ε 使得 $\varepsilon K<\alpha$，又取 σ 使得(2.10)成立. 对于 $t\geqslant t_0$ 的满足 $|x(t)|<\sigma$ 的这些 t 值，有

$$|x(t)|\leqslant Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x(t_0)|+\int_{t_0}^{t}\varepsilon Ke^{-\alpha(t-s)}|x(s)|ds.$$

用与前面的定理证明相同的作法，得到

$$|x(t)|\leqslant K|x(t_0)|e^{-(\alpha-\varepsilon K)(t-t_0)},\tag{2.13}$$

它对于 $t \geqslant t_0$ 中使 $|x(t)|<\sigma$ 的所有 t 值成立. 由于 $\alpha-\varepsilon K>0$, 由此不等式推知对于所有 $t \geqslant t_0$, 只要 $|x(t_0)|<\sigma/K$, 便有 $|x(t)|<\sigma$. 因此, 只要 $|x(t_0)|<\sigma/K$, (2.13)便对所有 $t \geqslant t_0$ 成立. 关系式(2.13)显然蕴涵着解 $x=0$ 的一致渐近稳定性. 定理证毕.

定理 2.4 是 Liapunov 关于一次近似的稳定性的著名定理的推广. 这样说的理由如下: 假设 g: $R^{n+1} \to R^n$ 是连续映射, $g(t,x)$ 有连续的对 x 的一阶偏微商, 并且对所有 t 有 $g(t, 0)=0$. 如果 $A(t)x=[\partial g(t,0)/\partial x]x$, $f(t,x)=g(t,x)-A(t)x$, 则 $f(t,0)=0$, $\partial f(t,0)/\partial x=0$, 于是定理2.4 的条件得以满足. 函数 $A(t)x$ 显然便是方程 $\dot{x}=g(t,x)$ 右边的线性近似.

关于被扰动的线性系统的稳定性, 还有许多结果可用, 而且显然还可以通过抽象出前面诸证明的要点而得到许多变形. 在这一节末的习题指出了几种可能产生的情形.

尽管上述各定理的证明极为简单, 而且其结果在直观上并不意外, 但是在研究任意的被扰动的线性系统时, 必须极端仔细.

例如 $\ddot{u}-2t^{-1}\dot{u}+u=0$ 有基本解组 $\sin t-t\cos t$, $\cos t+t\sin t$ 因此是不稳定的, 但这个方程可以看作是一致稳定系统 $\ddot{u}+u=0$ 的扰动方程.

下面这个例子是一个(1.3)型方程, 它渐近稳定, 但不一致, 而系统(2.7)对于适当的 $B(t)$ 则是不稳定的, 这里 $B(t)$ 满足

$$\int^{\infty}|B(s)|ds<\infty,$$

当 $t\to\infty$ 时 $|B(t)|\to 0$. 考虑系统(1.3), 其中

$$A(t)=\begin{bmatrix}-a & 0\\ 0 & \sin\log t+\cos\log t-2a\end{bmatrix}. \qquad (2.14)$$

又 $1<2a<1+e^{-\pi}$. (1.3)的解是

$$x_1(t)=c_1\exp(-at),$$

$$x_2(t)=c_2\exp(t\sin\log t-2at),$$

这里的 c_1、c_2 是任意常数. 对于任意 c_1、c_2, 当 $t\to\infty$ 时 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 指数地趋于零. 如果 $B(t)$ 定义为

$$B(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ e^{-at} & 0\end{bmatrix},$$

则 $\int^{\infty}|B(s)|ds<\infty$, 且 $t\to\infty$ 时 $|B(t)|\to 0$. 被扰动方程(2.7)的解(初始时刻 $t_0=0$)是

$$x_1(t)=c_1\exp(-at).$$

$$x_2(t)=\left[c_2+c_1\int_0^t\exp(-s\sin\log s)ds\right]$$

$$\times\exp(t\sin\log t-2at).$$

选取满足 $0<\alpha<\pi/2$ 的 α, 以及 $t_n=\exp[(2n-1/2)\pi]$, $n=1,2,\cdots$, 则对于 $t_n\leqslant s\leqslant t_ne^{\alpha}$ 有 $\sin\log s\leqslant-\cos\alpha$. 因此

$$\int_0^{t_ne^{\alpha}}\exp(-s\sin\log s)ds>\int_{t_n}^{t_ne^{\alpha}}\exp(-s\sin\log s)ds$$

$$\geqslant\int_{t_n}^{t_ne^{\alpha}}\exp(s\cos\alpha)ds$$

$$>t_n(e^{\alpha}-1)\exp(t_n\cos\alpha).$$

取 $c_2=0$、$c_1=1$. 由于 $\sin\log(t_ne^{\pi})=1$, 我们有

$$|x_2(t_ne^{\pi})|\geqslant t_n(e^{\alpha}-1)\exp(bt_n).$$

此地 $b=(1-2a)e^{\pi}+\cos\alpha$. 如果取 α 使得 $b>0$, 则 $n\to\infty$ 时 $|x_2(t_ne^{\pi})|\to\infty$, 故此系统不稳定.

习题 2.1. 假设有常数 K 使得实系统(1.3)的基本矩阵解 X 当 $t\geqslant\beta$ 时满足 $|X(t)|\leqslant K$, 又假设

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\beta}^{t}trA(s)ds>-\infty.$$

证明 X^{-1} 在 $[\beta,\infty)$ 上有界, (1.3) 没有当 $t\to\infty$ 时趋于零的非零解.

习题 2.2. 假设 A 满足习题 2.1 的条件，而 $B(t)$ 是 $t\geqslant\beta$ 时的 $n\times n$ 实连续矩阵，$\int_{\beta}^{\infty}|A(t)-B(t)|dt<\infty$. 证明 $\dot{y}=B(t)y$ 的每个解在 $[\beta,\infty)$ 上有界. 对于(1.3)的每个解，证明 $\dot{y}=B(t)y$ 有唯一解 y，使得 $t\to\infty$ 时 $y(t)-x(t)\to 0$.

习题 2.3. 假设系统(1.3)一致渐近稳定，f 满足定理 2.4 的条件，又 $t\to\infty$ 时 $b(t)\to 0$. 证明存在 $T>\beta$，使得

$$\dot{x}=A(t)x+f(t,x)+b(t)$$

的任何解 $x(t)$，只要 $|x(T)|$ 足够小，当 $t\to\infty$ 时都趋于零.

习题 2.4. 把习题 2.3 的结论推广，用 $g(t,x)$ 来代替 $b(t)$，这里当 $t\to\infty$ 时对于紧集的 x 而言，$g(t,x)$ 一致趋于零.

习题 2.5. 假设存在连续函数 $c(t)$，当 $t\geqslant\beta$ 时，对某个常数 $\gamma=\gamma(\beta)$ 有 $\int_{t}^{t+1}c(s)ds\leqslant\gamma$，又 $f:R^{n+1}\to R^{n}$ 连续，且 $|f(t,x)|\leqslant c(t)|x|$. 证明存在常数 $r>0$，使得(2.11)的解 $x=0$ 当 $\gamma<r$ 时一致渐近稳定.

习题 2.6. 把习题 2.3 与 2.4 推广到 f 满足习题 2.5 的条件的情形.

Ⅲ.3. n 阶纯量方程

由于在应用中经常出现 n 阶纯量方程，值得把第 1 节得到的知识转移到此类方程. 假设 y 是一个纯量，$a_1,\cdots,a_n$ 与 g 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的实值或复值连续函数，考虑方程

$$D^{n}y+a_1(t)D^{n-1}y+\cdots+a_n(t)y=g(t). \qquad (3.1)$$

这里的 D 表示对 t 求微商的运算. 函数 D^2y 是 y 对 t 的二阶微商，等等. 方程(3.1)等价于

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+h,\\ x=\begin{bmatrix}y\\ Dy\\ \vdots\\ D^{n-2}y\\ D^{n-1}y\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&&&&\\ 0&0&0&\cdots&1\\ -a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\cdots&-a_1\end{bmatrix},h=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ g\end{bmatrix}.\end{cases}\tag{3.2}$$

根据(3.1)这种形式，(3.2)的解是一个 n 维列向量，但它的第一个分量必然是(3.1)的解，第 $j+1$ 个分量等于第 j 个分量对于 t 的微商. 因此，若把(3.2)的任意 $n\times n$ 矩阵解写成$[\xi^1,\cdots,\xi^n]$，每个 ξ^j 是 n 维向量，必然满足 $\xi^j=(\phi_j, D\phi_j, \cdots, D^{n-1}\phi_j)$，其中的 $\phi_j(j=1,2,\cdots,n)$是(3.1)的解.

如果 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ 是 n 个 $n-1$ 阶连续可微的纯量函数，它们的 Wronsky 行列式 $\Delta(\phi_1,\cdots,\phi_n)$定义为

$$\Delta(\phi_1,\cdots,\phi_n)=\det\begin{bmatrix}\phi_1&\phi_2&\cdots&\phi_n\\ D\phi_1&D\phi_2&\cdots&D\phi_n\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ D^{n-1}\phi_1&D^{n-1}\phi_2&\cdots&D^{n-1}\phi_n\end{bmatrix}.\tag{3.3}$$

定义在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的一组纯量函数 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ 称为在$[a,b]$上线性相关，如果存在不全为零的常数 $c_1,\cdots,c_n$，使得对所有 $t\in[a,b]$有 $c_1\phi_1(t)+\cdots+c_n\phi_n(t)=0$. 否则，这些函数在$[a,b]$上线性无关.

引理 3.1. 如果 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ 是区间 I 上 $n-1$ 阶连续可微的纯量函数，则当(3.3)中定义的 Wronsky 行列式Δ在 I 上不等于零时，$\phi_1,\cdots,\phi_n$ 在 I 上线性无关.

证明 假设诸 ϕ_i 有在 I 上等于零的线性组合. 比较细致地说，假设

$$\sum_{j=0}^{n} c_j\phi_j(t)=0,\quad t\in I,$$

其中 c_j 是常数. 对这个关系式反复求微商,得到关于常数 c_j 的方程组如下:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j D^k\phi_j(t)=0,\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

或者用矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \\ D\phi_1 & D\phi_2 & \cdots & D\phi_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D^{n-1}\phi_1 & D^{n-1}\phi_2 & \cdots & D^{n-1}\phi_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}=0.$$

它对于所有 $t\in I$ 都成立. 另一方面,根据假设,系数矩阵的行列式对于所有 $t\in I$ 不等于零,由此推知此方程只有解 $c_1=\cdots=c_n=0$;也就是说,诸函数 ϕ_j 线性无关.

这个命题反过来不真. 事实上,可能有在区间 I 上 $n-1$ 阶连续可微的 n 个函数,它们的 Wronsky 行列式对于所有 $t\in I$ 恒等于零,但是仍然线性无关. 对于 $n=2$ 的情况,只需选取$[0,3]$上两个连续可微的函数 ϕ_1,ϕ_2,使得当 $t\in[0,2]$时 $\phi_1(t)=0$, $t\in[1,3]$ 时 $\phi_2(t)=0$,而在其他点函数不等于零.

另一方面,从引理 3.1 的证明显然可知 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ 在 I 的线性相关意味着在 I 上 $\Delta\equiv 0$.

如果 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ 是齐次方程

$$D^n y+a_1(t)D^{n-1}y+\cdots+a_n(t)y=0, \tag{3.4}$$

的解,则 $\Delta(\phi_1,\cdots,\phi_n)$是(3.2)的齐次方程组(也就是说, 在(3.2)中 $h=0$)的 $n\times n$ 矩阵解的行列式. 从引理 1.2、1.5、公式(3.2)与上面的说明推知

定理 3.1. 如果 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ 是 (3.4) 的 n 个解, 则对于所有

$t\in(-\infty,\infty)$, $\Delta(\phi_1,\cdots,\phi_n)(t)\neq 0$ 或恒等于零. 比较具体地说,

$$\Delta(\phi_1,\cdots,\phi_n)(t)=\Delta(\phi_1,\cdots,\phi_n)(0)\exp\left(-\int_0^t a_1(s)ds\right).$$

于是,(3.4)的 n 个解 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ 线性无关,当且仅当

$$\Delta(\phi_1,\cdots,\phi_n)(0)\neq 0.$$

让我们来确定方程(3.1)的解的常数变易公式. 由于(3.1)等价于(3.2),只需(3.2)的解的第一个分量的常数变易公式就行了. 如果 $X(t,\tau)(X(\tau,\tau)=I)$ 是 $\dot{x}=Ax$ 的主矩阵解, 则(3.2)的任意解满足关系(1.7). 如果把矩阵 $X(t,\tau)$ 的第一行记作$(\phi_1(t,\tau),\cdots,\phi_n(t,\tau))$,则(1.7)中向量 x 的第一个分量 y 是

$$y(t)=\sum_{j=1}^{n}[D^{j-1}y(\tau)]\phi_j(t,\tau)$$

$$+\int_\tau^t \phi_n(t,s)g(s)ds, \qquad (3.5)$$

此地 g 是(3.1)中给定的函数. 所得表达式如此简单, 是由于(2.2)中向量 h 除开最后一个分量为 g 外其他分量都是零. 由于函数 $\phi_n(t,s)$ 与其直到 $n-1$ 阶微商形成矩阵 $X(t,s)$ 的最后一列, 因之 $\phi_n(t,s)$ 是齐次方程(3.4)的解, 在 $t=s$ 时它与直到 $n-2$ 阶微商等于零,而对 t 的 $n-1$ 阶微商等于一. 把这些总结起来, 得

定理 3.2. 对于$(-\infty,+\infty)$内的任意实数 s, 令 $\phi(t,s)$ 为齐次方程(3.4)的满足初始条件

$$y(s)=Dy(s)=\cdots=D^{n-2}y(s)=0,\ D^{n-1}y(s)=1 \qquad (3.6)$$

的唯一解. 则方程(3.1)的在 $t=\tau$ 与其直到 $n-1$ 阶微商为止都等于零的唯一解由

$$y(t)=\int_\tau^t \phi(t,s)g(s)ds \qquad (3.7)$$

给出.

从第1节的一般理论容易得到的另一个关系是(3.4)的伴随

方程. 这由第 1 节给出的伴随方程的一般定义推出. (3.2) 当$h=0$时的伴随方程是 $\dot{w}=-wA$, $w=(w_1,\cdots,w_n)$, 或者等价地写作

$$
\begin{cases}
Dw_1=a_nw_n\\
Dw_2=-w_1+a_{n-1}w_n\\
\quad\cdots\\
Dw_n=-w_{n-1}+a_1w_n.
\end{cases}
\tag{3.8}
$$

方程组 (3.8) 并非显然就等价于某种类型的一个 n 阶纯量方程. 然而, 如果每个函数 a_k $(k=1,\cdots,n)$ 有充分阶的连续微商, 就显然了. 事实上, 把(3.8)的第 $k+1$ 个方程对 t 求 k 阶微商, 得到等价的方程组

$$Dw_1=a_nw_n$$

$$D^{k+1}w_{k+1}=-D^kw_k+D^k(a_{n-k}w_n),\quad k=1,2,\cdots,n-1. \tag{3.9}$$

如果 $z=w_n$, 容易从(3.9)归结出

$$D^nz-D^{n-1}(a_1z)+\cdots+(-1)^na_nz=0. \tag{3.10}$$

方程(3.10)叫作方程(3.4)的伴随方程. 如果诸 a 为常数, 它与原方程是相同的微分方程, 只不过某些系数改变了符号.

Ⅲ.4. 常系数线性系统

在这一节里, 我们考虑齐次方程

$$\dot{x}=Ax \tag{4.1}$$

与非齐次方程

$$\dot{x}=Ax+h(t), \tag{4.2}$$

这里的 A 是 $n\times n$ 的实或复常数矩阵, 而 h 是$(-\infty,\infty)$上的 n 维实或复向量函数.

(4.1)在 $t=0$ 的主矩阵解$P(t)$的每列满足(4.1)而 $P(0)=I$ (单位方阵). 矩阵 $P(t)$满足下述性质: 对于所有 t, $s\in(-\infty,\infty)$, $P(t+s)=P(t)P(s)$. 事实上, 对于每个固定的 $s\in(-\infty,\infty)$,

$P(t+s)$与$P(t)P(s)$都满足(4.1)，而对于$t=0$，这两个矩阵相同. 于是，唯一性定理蕴含了上述结论. 这个关系使人想起$P(t)$的作用与指数函数一样. 因此，我们作下述

定义 4.1. 对于$-\infty<t<\infty$，$n\times n$矩阵e^{At}($e^0=I$，I为单位方阵)被定义为(4.1)在$t=0$的主矩阵解.

矩阵e^{At}具备下列性质：

(i) $e^{A(t+s)}=e^{At}e^{As}$

(ii) $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$

(iii) $\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A$

(iv) $e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^nt^n+\cdots$

(v) (4.1)的通解是$e^{At}c$，这里的c是任意n维常向量.

(vi) 如果$X(t)$($\det X(0)\neq 0$)是(4.1)的$n\times n$矩阵解，则

$$e^{At}=X(t)X^{-1}(0).$$

性质(i)在上面证明了，性质(ii)是(i)的结论. 性质(v)是这种特殊情况下的引理1.3. 从唯一性并注意到Ae^{At}与$e^{tA}A$都是(3.1)的矩阵解，便推出(iii). 同样可证明(vi).

在证明(iv)之先，必须对矩阵幂级数的意义作少许说明. 如果$f(z)$是复变量z的函数，它在$z=0$的邻域内解析，则幂级数$f(A)$定义为通过把$f(z)$的幂级数中的复变量z用矩阵A来代换所得到的形式幂级数. 自然，当且仅当对于各个矩阵A，幂级数矩阵的元素收敛时，这种表达式才有意义. 当$f(z)$是复变量z的解析函数时，人们实际上可用这种级数来定义矩阵函数$f(A)$. 另一方面，应该注意上述性质(iv)不是e^{At}的定义，而是将要从e^{At}是(4.1)在$t=0$的主矩阵解这一事实推导出来的.

(iv)的证明 由于$P(t)\xlongequal{\text{def}}e^{At}$是(4.1)在$t=0$的主矩阵

解，推知 $P(t)$ 必须满足积分方程

$$P(t)=I+\int_0^t AP(s)ds. \tag{4.3}$$

如果试用逐次逼近这种明显的方法来解方程(4.3)

$$\begin{aligned} &P^{(0)}=I \\ &P^{(k+1)}(t)=I+\int_0^t AP^{(k)}(s)ds, \quad k=0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{4.4}$$

则可见 $P^{(k)}$ 的表示由公式

$$P^{(k)}(t)=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k$$

给出. 在第 I 章证明 Picard-Lindelöf 定理时，曾指出这个序列对于 $|t|\leqslant\alpha$(α 甚小)收敛. 现在我们愿指出，对于$(-\infty,\infty)$ 内的一个紧集的所有 t，矩阵 $P^{(k)}(t)$形成的序列一致收敛. 如果我们令 $P_{ij}^{(k)}(t)$为矩阵 $P^{(k)}(t)$的第 ij 元素，则存在与 k 无关的常数 $\beta>0$，使得$|P_{ij}^{(k)}(t)|\leqslant\beta^{-1}|P^{(k)}(t)|$，于是，

$$\beta|P_{ij}^{(k)}(t)|\leqslant 1+\alpha t+\frac{1}{2!}\alpha^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}\alpha^kt^k\leqslant e^{\alpha t}.$$

这里为了简便，已令 $\alpha=|A|$. 此外，

$$\beta|P_{ij}^{(k+1)}(t)-P_{ij}^{(k)}(t)|\leqslant\frac{1}{(k+1)!}\alpha^{k+1}t^{k+1}$$

而且序列$(P_{ij}^{(k)}(t))$对于$(-\infty,\ \infty)$的紧集的所有 t 一致收敛. 这表明性质(iv)的幂级数有明确的定义，于是矩阵序列$\{P^{(k)}(t)\}$ 在$(-\infty,\infty)$ 的所有紧子集上一致收敛. 根据 (4.4)，这个极限是(4.1)的主矩阵解 $P(t)=e^{At}$. 这就证明了性质(iv).

尽管上面讲的表面上简单，矩阵 e^{At} 实际是颇复杂的. 对于纯量指数函数正确的许多运算，对于矩阵函数 e^{At} 也正确. 然而，由于矩阵的乘法一般是不可交换的，矩阵指数函数的另一些运算就与纯量指数函数不同. 下面两个习题说明在演算 e^{At} 时必须小心.

习题 4.1. 证明当且仅当 $BA=AB$ 时,对所有 t 有

$$Be^{At}=e^{At}B.$$

习题 4.2. 证明当且仅当 $BA=AB$ 时,对所有 t 有

$$e^{At}e^{Bt}=e^{(A+B)t}.$$

(4.1)的通解由 $e^{At}c$ 给出,其中 c 是 n 维常向量,而矩阵 e^{At} 有在性质(iv)中给出的幂级数表示式.人们可能要问关于常系数线性方程还有什么尚未加以讨论.不幸,前面用的记号容易迷惑人,而我们还没有回答下述问题:在哪种确定的意义下,函数 $x(t)=e^{At}c$(c是 n 维常向量)具有与纯量指数函数相同的性质?有效地计算 e^{At} 的方法为何?

这两个问题紧密相关,都归结到细致地讨论矩阵的特征值与特征向量.微分方程(4.1)的解的一般结构完全由代数问题的解所决定.这个事实表明了常系数线性微分方程组的简单,也解释了为什么在应用中常试用常系数方程来模拟物理系统模型.

复数 λ 称为 $n\times n$ 矩阵 A 的特征值(本征值、固有值),如果存在非零向量 v 使得

$$Av=\lambda v \quad 或 \quad (A-\lambda I)v=0. \tag{4.5}$$

如果 λ 是矩阵 A 的一个特征值,而 v 是方程(4.5)的任一非零解,则 v 称为与特征值 λ 相连的特征向量(本征向量、固有向量).因此,λ 是矩阵 A 的特征值,当且仅当 λ 是特征方程

$$\det(A-\lambda I)=0 \tag{4.6}$$

的解.特征方程是 λ 的 n 次多项式,因此有 n 个解,其中可以有相同的.另一方面,如果 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 是矩阵 A 的不相同的特征值,而 $v^1,\cdots,v^k$ 是对应的特征向量,则 $v^1,\cdots,v^k$ 线性无关.下述引理是明显成立的.

引理 4.1. 如果 λ 是矩阵 A 的一个特征值,而 v 是与 λ 相连的特征向量,则函数 $x(t)=e^{\lambda t}v$ 是微分方程 $\dot{x}=Ax$ 的一个解.

引理 4.2. 如果 A 是 $n\times n$ 矩阵，有 n 个不相同的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，而 $v^1,\cdots,v^n$ 是相应的特征向量，则(4.1)的通解由

$$V(t)c=c_1v^1e^{\lambda_1t}+\cdots+c_nv^ne^{\lambda_nt}$$

给出，这里的 $V(t)=(v^1e^{\lambda_1t},\cdots,v^ne^{\lambda_nt})$，而 $c=(c_1,\cdots,c_n)$ 是任意的 n 维复向量，并且，$e^{At}=V(t)[V(0)]^{-1}$.

证明 设 $V(t)$ 的定义如上，由引理 1.3 推知，只要说明 $V(t)$ 是方程(4.1)的基本矩阵解就行了．由于 $V(0)=(v^1,\cdots,v^n)$，而向量 $v^1,\cdots,v^n$ 线性无关，故 $V(0)$ 是非奇异的．由这个事实、引理 4.1 与推论1.1推知 $V(t)$ 是(4.1)的基本矩阵解．因此通解是 $V(t)c$，其中 c 是任意的 n 维向量．引理的最后一个断言正好是对于 e^{At} 的上述性质(vi)．

如果矩阵 A 的元素是实数，则特征值中出现共轭复数对．这意味着对应的特征向量可取为复共轭，因此，如果只要(4.1)的实解，在通解中出现的常数需满足某些复共轭性限制条件．事实上，如果 λ_1 与 λ_2 复共轭，则特征向量 v^1、v^2 可选作复共轭的．这时为了得到方程(4.1)的实解，在通解中常数 c_1 与 c_2 必须选为复共轭的．

现在我们说明求 e^{At} 的一般手续．为此，需要线性代数的某些基本概念．设 C^n 是复 n 维空间，而 S_1、S_2 是 C^n 的线性子空间．子空间 S_1 与 S_2 线性无关，如果对 S_1 的 y_1 与 S_2 的 y_2，由 $c_1y_1+c_2y_2=0$ 推出 $c_1=c_2=0$．彼此无关的子空间 S_1 与 S_2 的直和 $S_1\oplus S_2$ 乃是 C^n 的一个子空间，其元素 y 由 $y=y_1+y_2$ 表出，这里 $y_1\in S_1$，$y_2\in S_2$．假设 A 是 $n\times n$ 矩阵，而 S 是 C^n 的子空间，如果对于任意 $y\in S$，向量 Ay 也在 S 内，则 S 是在 A 之下的不变量．如果 A 是 $n\times n$ 矩阵，C^n 中所有满足 $Ay=0$ 的 y 的集合是 A 的零空间，记作 $N(A)$．如果 λ 是 $n\times n$ 矩阵 A 的特征值，用 $r(\lambda)$ 记使得

$$N[(A-\lambda I)^{k+1}]=N[(A-\lambda I)^k]$$

的最小整数 k．集合 $N[(A-\lambda I)^{r(\lambda)}]$ 是 C^n 的子空间，称为 A 的对

应于特征值 λ 的广义特征空间，并记作 $M_\lambda(A)$. $M_\lambda(A)$ 的维数等于特征值 λ 的代数重数，也就是此特征值作为特征多项式

$$\det(A-\lambda I)$$

零点的重数. 如果 $M_\lambda(A)=N[(A-\lambda I)]$, 我们说 A 的特征值 λ 有单初等因子. 下述结论是基本的，其证明可在任何一本线性代数书中找到.

引理 4.3. 如果 A 是 $n\times n$ 矩阵，而 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 A 的不相同的特征值，则对应的广义特征空间 $M_{\lambda_1}(A),\cdots,M_{\lambda_s}(A)$ 线性无关. 在矩阵 A 之下不变，并且 $C^n=M_{\lambda_1}(A)\oplus\cdots\oplus M_{\lambda_s}(A)$.

由于当 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 A 的不同特征值时，广义特征空间 $M_{\lambda_1}(A),\cdots,M_{\lambda_s}(A)$ 是线性无关的，因之 C^n 内任意向量 x^0 可以唯一地表示为

$$x^0=\sum_{j=1}^{s}x^{0,j},\qquad x^{0,j}\in M_{\lambda_j}(A). \tag{4.7}$$

由于广义特征空间 $M_{\lambda_j}(A)$ 在矩阵 A 之下不变，微分方程(4.1)的初值在 $M_{\lambda_j}(A)$ 内的任何解，对于 t 的所有值，将留在 $M_{\lambda_j}(A)$ 内. 这一点很明显，因为描述微分方程解的曲线的切向量，在相空间中是落在子空间 $M_{\lambda_j}(A)$ 内的.

对于任意 $x^0\in C^n$ 与任意复数 λ,

$$e^{At}x^0=e^{(A-\lambda I)t}e^{\lambda t}x^0=e^{(A-\lambda I)t}x^0e^{\lambda t}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}(A-\lambda I)^k\frac{t^k}{k!}\right)x^0e^{\lambda t}.$$

如果 λ 是 A 的一个特征值，而 $M_\lambda(A)$ 是相应的广义特征空间，则由 $x^0\in M_\lambda(A)$ 推知对于所有 $k\geqslant r(\lambda)$ 有 $(A-\lambda I)^kx^0=0$, 因而上述无穷级数实际上只是一个多项式. 于是，对于任意 $x^0\in M_\lambda(A)$, $e^{At}x^0$ 是

$$e^{At}x^0=\left[\sum_{k=0}^{r(\lambda)-1}(A-\lambda I)^k\frac{t^k}{k!}\right]x^0e^{\lambda t}. \tag{4.8}$$

总之，如果 λ 是矩阵 A 的一个特征值，而 $M_\lambda(A)$ 是对应的广义特征空间，则微分方程的初值在 $M_\lambda(A)$ 内的任意解对于所有 t 值必落在 $M_\lambda(A)$ 内，而微分方程的解是以向量乘 $e^{\lambda t}$ 作为系数的 t 的多项式. 并且，这个 t 的多项式可以通过直接计算 $e^{(A-\lambda I)t}$ 的无穷级数得到.

由这些说明与引理 4.3 以及分解式(4.7)得

定理 4.1. 如果 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 $n\times n$ 矩阵 A 的不同特征值，而 $M_{\lambda_1}(A), \cdots, M_{\lambda_s}(A)$ 是相应的广义特征空间，则初值问题

$$\dot{x}=Ax, \quad x(0)=x^0 \tag{4.9}$$

的解由

$$x(t)=\sum_{j=1}^{s}\left[\sum_{k=1}^{r(\lambda_j)-1}(A-\lambda_j I)^k\frac{t^k}{k!}\right]x^{0,j}e^{\lambda_j t} \tag{4.10}$$

给出，这里的向量 $x^{0,j}$ 属于广义特征空间 $M_{\lambda_j}(A)$，它由初始向量 x^0 按照方程(4.7)的唯一分解式所确定.

利用此结论的具体方式如下. A 的特征值的广义特征空间 $M_\lambda(A)$ 的维数等于特征值 λ 的代数重数. 对于给定的矩阵 A 的特征值 λ，首先求矩阵 $A-\lambda I$ 的零空间. 如果此零空间的维数不等于特征值 λ 的代数重数，就着手计算 $(A-\lambda I)^2$ 的零空间；如果此子空间的维数等于特征值 λ 的代数重数，子空间便是 $M_\lambda(A)$. 这个过程继续到求到一个维数等于特征值 λ 的代数重数的子空间为止. 对于矩阵 A 的每个特征值 λ 这样作了以后，便得 C^n 的一组基. 元素 x^0 对于这组基可以唯一地展开，确定 $x^{0,j}$，于是由公式(4.10)得到解 $x(t)$. 在(4.10)中把 $x^{0,j}$ 用广义特征空间 $M_{\lambda_j}(A)$ 的基向量的任意线性组合来代替($j=1,2,\cdots,s$)，便可求出方程(4.1)的通解.

习题 4.1. 利用定理 4.1, 求方程 $\dot{x}=Ax$ 的实通解:

$$(a)\quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(b)\quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(c)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$(d)\quad A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$(e)\quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

定理 4.1 完整地描述了常系数线性方程解的一般形式；也就是说，(4.1)的任何解是若干指数项的和，其系数是 t 的多项式. 指数项的指数是 A 的特征值. 对应的 t 的多项式的次数比特征值的广义特征空间的维数至多小一. 关于(4.1)的形如 $p(t)e^{\lambda t}$ ($p(t)$为次数已给定的多项式)的线性无关解的个数，可用 Jordan 标准形来完整地说明：对于一个 $n\times n$ 矩阵 A, 存在非奇异矩阵 Q, 使得

$$Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(C_1,\cdots,C_p),\tag{4.11}$$

$$C_j=\lambda_j I+R_j,$$

$$R_j=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 \end{bmatrix}$$

而 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,p)$是 A 的特征值. $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p$ 不一定全不相同,

C_j 的维数 n_j 不一定等于上面提到的 $r(\lambda_j)$.

如果 Q 与 A 按(4.11)相关连，则

$$Q^{-1}e^{At}Q=e^{t\operatorname{diag}(C_1,\cdots,C_p)t}=\operatorname{diag}(e^{C_1t},\cdots,e^{C_pt}), \qquad (4.12)$$

$$e^{C_jt}=e^{\lambda_jt}e^{R_jt},\ e^{R_jt}=\begin{bmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

表示式(4.12)给出了关于 e^{At} 的比较具体的知识，但它也与定理 4.1 同样地描述了(4.1)解的一般结构.

把矩阵 A 变为矩阵 $Q^{-1}AQ$(Q 非奇异)的变换是相似变换. 相似变换在微分方程理论中很重要. 事实上，如果 Q 是非奇异矩阵，而在(4.1)中 $x=Qy$，则 $\dot{y}=Q^{-1}AQy$. 由 Jordan 标准形推知，相似变换可用来把微分方程化成很简单的形式.

定理 4.2. (i) 系统(4.1)稳定的必要充分条件是，A 的特征值的实部$\leqslant 0$，并且零实部特征值有单初等因子.

(ii) 系统(4.1)渐近稳定的必要充分条件是，A 所有特征值的实部<0. 如果是这种情形，存在正的常数 K、α 使得

$$|e^{At}|\leqslant ke^{-\alpha t},\quad t\geqslant 0. \qquad (4.13)$$

证明 由于(4.1)是自治系统，稳定性意味着一致稳定性，渐近稳定性意味着一致渐近稳定性. 由定理 1.2 得知(4.1) 的稳定性与有界性等价，而渐近稳定性与指数渐近稳定性等价.

(i) 如果(4.1)的所有解有界，则根据引理 4.1，A 不能有特征值是正实部的. 并且，如果有特征值是零实部的，并且

$$M_\lambda(A)\neq N[(A-\lambda I)],$$

则由定理 4.1 推知，存在是非零常向量的 $te^{\lambda t}$ 倍的解. 这种解将

不是有界的. 反过来,如果所有特征值的实部不是正数,而且对于零实部的特征值有 $M_\lambda(A)=N[(A-\lambda I)]$,则由一般表示定理(定理4.1)推知,除非被乘上 $e^{\lambda t}(Re\lambda<0)$,不会出现 t 的幂. 因此,解是有界的.

(ii) 利用定理 4.1 与定理 1.2, 以与上同样方式可证明这一部分.

由于 $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$, 由公式(1.7)知(4.2)的常数变易公式是

$$x(t)=e^{A(t-\tau)}x(\tau)+\int_\tau^t e^{A(t-s)}h(s)ds. \tag{4.14}$$

用特例说明这个关系式,考虑纯量方程

$$\ddot{u}+u=g(t).$$

这个方程等价于系统

$$\dot{u}=v,$$

$$\dot{v}=-u+g(t).$$

如果 $x=(u,v)$,

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\qquad f=\begin{bmatrix}0\\ g\end{bmatrix},$$

则

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix},$$

而(4.14)的第一个分量是

$$u(t)=u(\tau)\cos(t-\tau)+\dot{u}(\tau)\sin(t-\tau)$$

$$+\int_\tau^t \sin(t-s)g(s)ds,$$

这是在初等微分方程中熟知的公式.

Ⅲ.5. 二维线性自治系统

作为定理 4.1 的一个应用, 我们来把下述微分方程解的不

同性态进行分类.

$$\dot{x}=Ax,\quad A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ \det A\neq 0, \tag{5.1}$$

其中 a、b、c、d 都是实数，如果用 λ_1、λ_2 来记 A 的特征值，有许多情形要考虑.

情形 1. λ_1、λ_2 是实数，$\lambda_2<\lambda_1$. 设 v^1, v^2 分别记 A 的与特征值 λ_1、λ_2 相连的单位特征向量. (5.1)的实通解是

$$x(t)=c_1e^{\lambda_1 t}v^1+c_2e^{\lambda_2 t}v^2. \tag{5.2}$$

这里的 c_1、c_2 是任意的实常数. 对于给定的 c_1、c_2, $c_1^2+c_2^2>0$, 由(5.2)描述的轨道 γ 的单位切向量，如果 $c_1\neq 0$, 当 $t\to\infty$ 时趋于 $\pm v^1$, 如果 $c_2\neq 0$, 当 $t\to-\infty$ 时趋于 $\pm v^2$.

情形 1a. 负根, $\lambda_2<\lambda_1<0$(稳定结点). 所有解当 $t\to\infty$ 时趋于零，而关于渐近方向的上述知识使人们能画出轨道草图如图 5.1. 直线 L_1 与 L_2 是分别包含特征向量 v^1 与 v^2 的直线. 原点稳定，称为稳定结点.

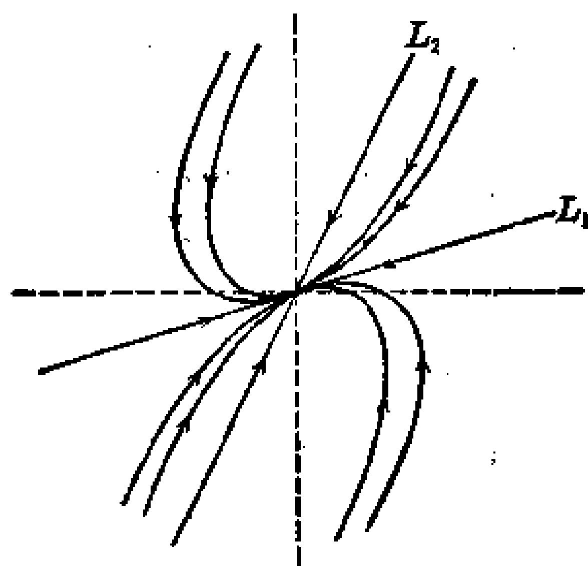


图 II.5.1 稳定结点($\lambda_2<\lambda_1<0$)

情形 1b. 正根, $0<\lambda_2<\lambda_1$(不稳定结点). 这种情形与 1a 相似，只是要倒转箭头指向，并且改换曲线的切线. 请见图 5.2. 原

点不稳定，称为不稳定结点。

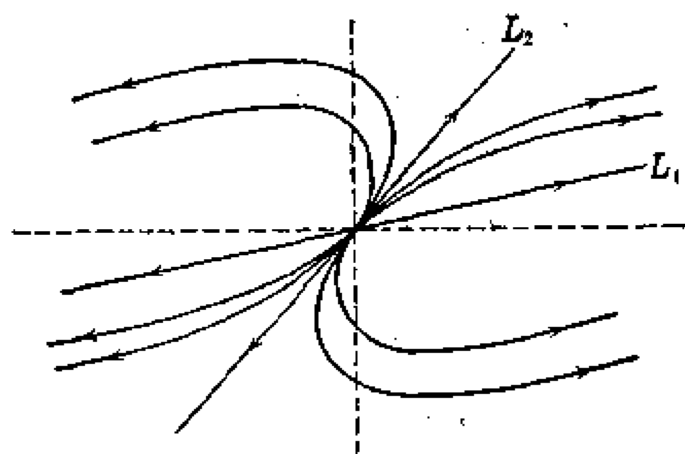


图 Ⅲ.5.2　不稳定结点（$0<\lambda_2<\lambda_1$）

情形 1c．一个正根与一个负根，$\lambda_2<0<\lambda_1$（鞍点）．从(5.2)知，落在 L_2 上的轨道当 $t\to+\infty$ 时趋于零，落在 L_1 上的轨道当 $t\to-\infty$ 时趋于零．其他轨道都是无界的．零解不稳定，在图 5.3 中描绘了轨道，原点称为鞍点．

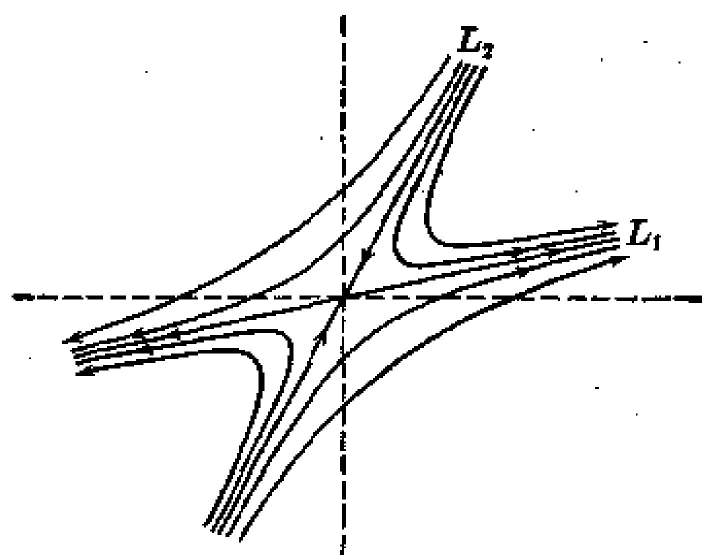


图 Ⅲ.5.3　鞍点 $\lambda_2<0<\lambda_1$

情形 2．复根．由于 A 是实矩阵，我们有 $\lambda_1=\alpha+i\beta$，$\lambda_2=\alpha-i\beta$，α、β 为实数，$\beta>0$．如果把 v^1 与 v^2 取成复共轭，(5.1)的实通解是

$$x(t)=c_1e^{(\alpha+i\beta)t}v^1+\bar{c}_1e^{(\alpha-i\beta)t}\bar{v}^1=2Re(c_1e^{(\alpha+i\beta)t}v^1),$$

这里 c^1 是任意复数，$\bar{b}$ 记向量 b 的复共轭.

如果 $v^1=u+iv$，u、v 为实数，则 u、v 线性无关，又如果

$$c_1=ae^{i\delta},$$

a、δ为实数，则(5.1)的实通解是

$$x(t)=2ae^{\alpha t}[u\cos(\beta t+\delta)-v\sin(\beta t+\delta)]. \qquad (5.3)$$

表达式(5.3)给出解的所有基本性质. 如果 $\beta t+\delta=k\pi$，k 为整数，则解的轨道穿过由 u 生成的直线 U，又如果

$$\beta t+\delta=(2k+1)\pi/2,$$

k 为整数，轨道又穿过 v 生成的直线 V. 解曲线在 u，v 方向上的分量是振动的，并且它们的相差为 $\pi/2$ 弧度. 因此，轨道必然象螺线.

情形 2a. 纯虚根(中心). 如果 A 的特征值是 $\pm i\beta$，(5.1)的实通解是

$$x(t)=a[u\cos(\beta t+\delta)-v\sin(\beta t+\delta)],$$

这里的 a、δ 是任意实常数，u、v 与上面相同. 轨道是闭曲线，每个解的周期为 $2\pi/\beta$. 如果 u、v 相互正交，这些曲线就是中心在(0, 0)的椭圆. 否则，它们便是畸变的椭圆(见图 5.4). 原点稳定，称为中心.

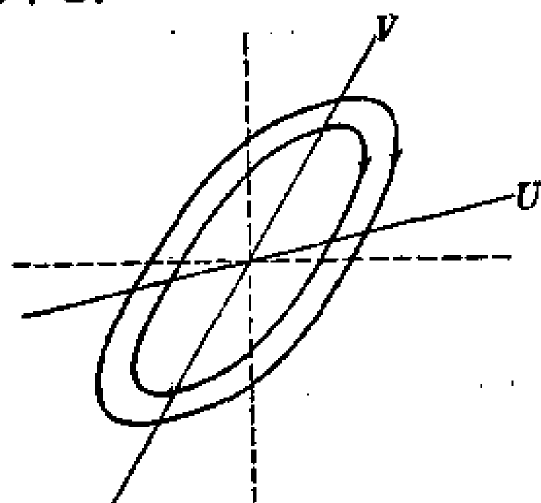


图 Ⅱ.5.4　中心 $\lambda_1=\bar{\lambda}_2$, $Re\lambda_1=0$, $Im\lambda_1\neq0$

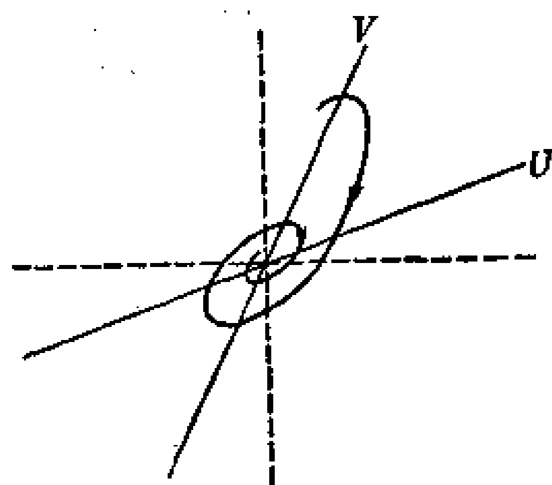


图 Ⅱ.5.5　稳定焦点

情形 2b. 负实部的复根(稳定焦点). 如果 $\alpha<0$，从(5.3)推

知所有解当 $t\to\infty$ 时趋于零，轨道是螺线，平衡点称为稳定焦点（见图 5.5）。

情形 $2c$. 正实部的复根（不稳定焦点）. 如果 $\alpha>0$，则当 $t\to-\infty$ 时解趋于零，平衡点称为不稳定焦点（见图 5.6）。

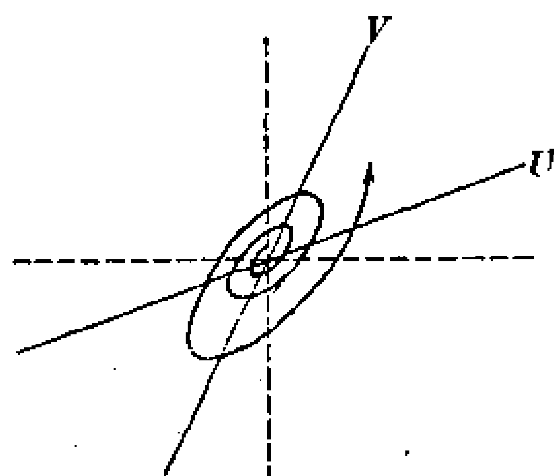


图 Ⅱ.5.6 不稳定焦点

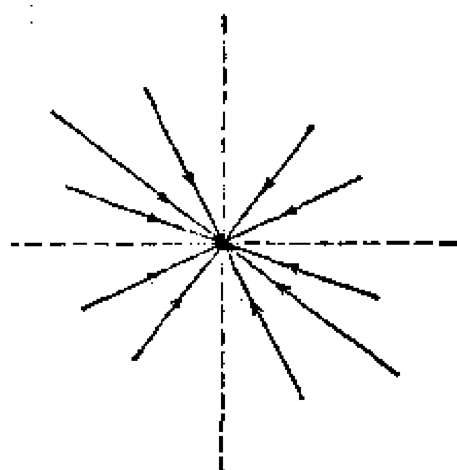


图 Ⅱ.5.7 稳定的非正常结点

情形 3. 两特征值相等（非正常结点）. 特征值是实数. 如果与特征值 λ 相连有两个线性无关的实特征向量 v^1、v^2（即 λ 有单初等因子），则通解是

$$x(t)=(c_1v^1+c_2v^2)e^{\lambda t},$$

其中 c_1、c_2 是任意实常数. 对于任意 c_1、c_2，x 轨道的单位切向量是常向量. 因此，所有轨道是通过原点的直线（见图 5.7）。

如果 λ 仅有一个线性无关的特征向量，则由定理 4.1 给出的通解是

$$x(t)=(c_1+c_2t)e^{\lambda t}v^1+c_2e^{\lambda t}v^2,$$

此地 v^2 是与 v^1 线性无关的任意向量. 通过直接计算，可以证明当 $t\to+\infty$ 与 $t\to-\infty$ 时，轨道的切线平行于 v^1. 典型的情况如图 5.8 所示。

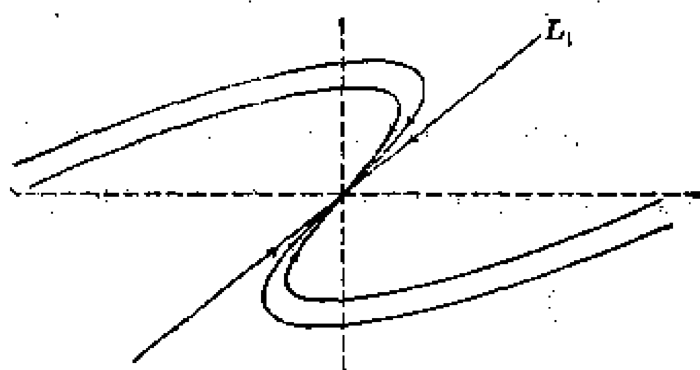


图 Ⅲ.5.8　稳定的非正常结点

Ⅲ.6. 鞍点性质

在上一节里，我们比较完整地刻划了二维常系数线性系统解的特性．研究在什么条件下微分方程的解在特殊类型平衡点附近的性态不因方程右边的"小"扰动而"改变"，是件有意义的事．由考虑仅有线性扰动 Bx（$|B|$是小量）的情形，易见对于二维线性系统，性态得以保存的平衡点只可能是焦点与鞍点．另一方面，就在 ∞ 的极限性态而言，除开中心以外的所有类型奇点对于小扰动都是不灵敏的．在这一节，我们对于任意阶的线性系统讨论对微分方程中的扰动不灵敏的一类特殊的平衡点．平衡点的分类在下述意义之下是粗糙的，它不考虑轨线的"精细"结构，而只管一般的渐近性质．这里讨论的问题在后面有一章里从较一般的角度来处理，但是尽管有所重复，看来现在考虑一种特殊情形还是合适的．

(4.1) 的平衡点 $x=0$ 称为(4.1)的(k)类鞍点，如果矩阵 A 的特征值的实部不为零，并且其中有 $k\geqslant 0$ 个的实部为正数．当 $n=2$ 时，鞍点的这个定义与第 5 节的定义不相同．事实上，在这一节里把完全稳定的平衡点($k=0$)与完全不稳定的平衡点($k=2$)都叫作鞍点．

如果 $x=0$ 是(4.1)的(k)类鞍点，空间 C^n 可以分解为

$$C^n = C_+^n \oplus C_-^n,$$
$$C_+^n = \pi_+ C^n, C_-^n = \pi_- C^n, \tag{6.1}$$

这里的 π_+, π_- 是射影算子，$\pi_+ + \pi_- = I$，C_+^n 的维数是 k，C_-^n 的维数是 $n-k$，C_+^n, C_-^n 在 A 之下不变，存在常数 $K>0$ 与 $\alpha>0$，使得对于所有 $x \in C^n$ 有

$$\begin{aligned} &(a) \quad |e^{At}\pi_+ x| \leqslant K e^{\alpha t} |\pi_+ x|, \quad t \leqslant 0, \\ &(b) \quad |e^{At}\pi_- x| \leqslant K e^{-\alpha t} |\pi_- x|, \quad t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{6.2}$$

这些关系式从下述观察直接推得，存在着非奇异矩阵 U，使得

$$U^{-1}AU = \mathrm{diag}(A_+, A_-),$$

这里 A_+ 是 $k \times k$ 矩阵，特征值的实部为正数，而 A_- 是 $(n-k) \times (n-k)$ 矩阵，特征值的实部为负数. 根据定理 4.2，存在常数 $K_1>0$，$\alpha>0$，使得当 $t \leqslant 0$ 时 $|e^{A_+t}| \leqslant K_1 e^{\alpha t}$，当 $t \geqslant 0$ 时 $|e^{A_-t}| \leqslant K_1 e^{-\alpha t}$. 这前一个关系式是从在方程 $\dot{u} = A_+ u$ 中以 $-t$ 代替 t 得到的，令 $C_+^n = \{x \in C^n$，使得 $x = Uy$，$y = (u, 0)$，u 是 k 维向量$\}$ 与 $C_-^n = \{x \in C^n$，使得 $x = Uy$，$y = (0, v)$，v 是 $n-k$ 维向量$\}$. 由于 U 是非奇异的，故 $C_+^n \oplus C_-^n = C^n$，这就定义了上面提到的射影算子 π_+, π_-. 显然，(6.1) 与 (6.2) 是满足的.

在 (6.1) 中定义的子空间 C_+^n 与 C_-^n 分别称为通过零的不稳定流形与稳定流形. 解轨道在不稳定流形上当 $t \to -\infty$ 时趋于零，在稳定流形上当 $t \to \infty$ 时趋于零. 此外，C_+^n 与 C_-^n 的结构清楚地说明，(4.1) 的那些 $t \geqslant 0$ $(t \leqslant 0)$ 时留在原点的给定邻域内的轨道，其解的初值必在 C_-^n (C_+^n) 上.

当一个以 $x=0$ 作为鞍点的线性系统，受到在接近于 $x=0$ 处是小的扰动时，可以期望它有什么特性呢？下面这个例子是有启发性的. 考虑二阶系统

$$\dot{x}_1 = x_1,$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1^3,$$

它的通解是

$$x_1(t)=e^t a,$$

$$x_2(t)=e^{-t}\left(b-\frac{a^3}{4}\right)+\frac{a^3}{4}e^{3t},$$

这里的 a、b 是任意常数．容易看出，当 $t\to\infty$ 时 $x_1(t),x_2(t)\to 0$，当且仅当 $a=0$ 与 b 任意．又当 $t\to-\infty$ 时 $x_1(t),x_2(t)\to 0$，当且仅当 $b=a^3/4$ 且 a 任意．如果 $b=a^3/4$，在相平面内对应的轨道是 $x_2=x_1^3/4$．相平面图如图 6.1 所示．请注意在 $x=0$ 附近，稳定流形与不稳定流形和线性系统基本相同．这个例子启发对非线性方程的鞍点提出如下定义．

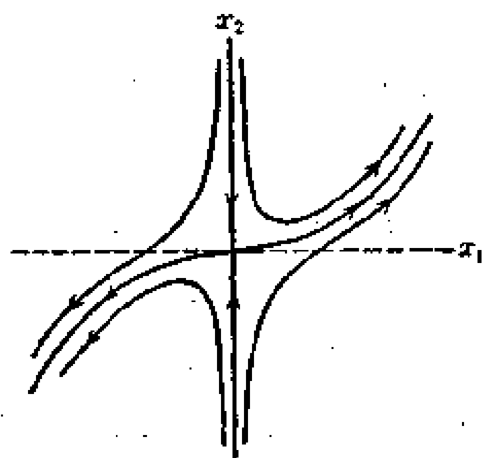


图 Ⅱ.6.1

假设 x_0 是方程

$$\dot{x}=Ax+f(x) \tag{6.3}$$

的平衡点，其中 f 在 C^n 上连续．我们说 x_0 是(6.3)的 (k) 类鞍点，如果存在 x_0 的有界开邻域 V 与 C^n 内的两个集合 U_k，S_{n-k}(分别是 k 维与 $n-k$ 维的，$U_k\cap S_{n-k}=\{x_0\}$，对于(6.3)而言，U_k 是负向不变的，S_{n-k} 是正向不变的)，使得(6.3)的任何当 $t\leqslant 0(t\geqslant 0)$ 时留在 V 内的解轨道，其初始值必在 $U_k(S_{n-k})$ 内，并且初始值在 $U_k(S_{n-k})$ 内的任何解轨道当 $t\to-\infty(+\infty)$ 时趋于 x_0．集合 U_k 称为不稳定流形，而 S_{n-k} 称为稳定流形．

假设 $x=0$ 是 (4.1) 的 (k) 类鞍点．如果对于某个函数族 $\mathscr{F}$ 中的每个 f，系统(6.3)有一个平衡点 $x_0=x_0(f)$，它是 (k) 类鞍点，我们就说对于给定的函数类 $\mathscr{F}$ 鞍点性质被保存．

我们的主要兴趣集中在当族 $\mathscr{F}$ 是"小"扰动族而平衡点 $x_0=x_0(f)$ 满足 $x_0(0)=0$ 时，鞍点性质的保存．如果 f 的一阶导数连

续，又我们在 $x=0$ 的有界邻域 V 上，以指定 f 的范数为

$$|f|=\sup_{x\in V}|f(x)|+\sup_{x\in V}\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|$$

来量度 f，则采取当 $|x|\to 0$ 时 $f(x)=o(|x|)$ 这一假定不损一般性. 事实上，存在 $\delta>0$，使得矩阵 $A+\partial f(x)/\partial x$ 作为 x 的函数当 $|x|<\delta$ 时有 k 个特征值是正实部的，有 $n-k$ 个特征值是负实部的. 根据隐函数定理，方程 $Ax+f(x)=0$ 在区域 $|x|<\delta$ 内有唯一解 x_0. 作变换 $x=x_0+y$ 得到方程

$$\dot{y}=\left[A+\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\right]y+f(x_0+y)-f(x_0)-\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}y$$

$$\xlongequal{\text{def}} By+g(y).$$

这里 B 有 k 个正实部的特征值与 $n-k$ 个负实部的特征值，而当 $|y|\to 0$ 时 $g(y)=o(|y|)$.

由于这个说明，我们对于至少满足 $|x|\to 0$ 时 $f(x)=o(|x|)$ 的连续函数族，考虑方程(6.3)的鞍点性质是否保存.

引理 6.1. 如果 $f: C^n\to C^n$ 是连续映射，$x=0$ 是(4.1)的 (k) 类鞍点，π_+、π_- 是(6.1)中定义的射影算子，则对于(6.3)的在 $[0,\infty)$ 上存在且有界的任何解 $x(t)$，存在 $x_-\in\pi_-C^n$ 使得 $t\geqslant 0$ 时 $x(t)$ 满足

$$x(t)=e^{At}x_-+\int_0^t e^{A(t-s)}\pi_-f(x(s))ds$$
$$+\int_\infty^0 e^{-As}\pi_+f(x(t+s))ds. \qquad (6.4)$$

对于 (6.3) 的在 $(-\infty, 0]$ 上存在且有界的任何解 $x(t)$，存在 $x_+\in\pi_+C^n$ 使得 $t\leqslant 0$ 时

$$x(t)=e^{At}x_++\int_0^t e^{A(t-s)}\pi_+f(x(s))ds$$
$$+\int_{-\infty}^0 e^{-As}\pi_-f(x(t+s))ds. \qquad (6.5)$$

反之，(6.4)的任何在$[0,\infty)$上有界的解与(6.5)的任何在$(-\infty,0]$上有界的解都是(6.3)的解.

证明 假设$x(t)$是(6.3)的解，它存在于$t\geqslant 0$，并且$t\geqslant 0$时$|x(t)|\leqslant M$. 存在常数L使得对于所有$x\in C^n$有$|\pi_+x|\leqslant L|x|$，于是对所有$t\geqslant 0$有$|\pi_+x(t)|\leqslant ML$. 由于f连续，故存在常数N使得$t\geqslant 0$时$|f(x(t))|\leqslant N$. 对于任意$\sigma\in[0,\infty)$，解$x(t)$满足

$$\pi_+x(t)=e^{A(t-\sigma)}\pi_+x(\sigma)$$

$$+\int_\sigma^t e^{A(t-s)}\pi_+f(x(s))ds,\quad t\in[0,\infty),$$

这里用到$A\pi_+=\pi_+A$. 此外也有$A\pi_-=\pi_-A$.

由于矩阵A满足(6.2)，对于$t\leqslant\sigma$有

$$|e^{A(t-\sigma)}\pi_+x(\sigma)|\leqslant Ke^{\alpha(t-\sigma)}|\pi_+x(\sigma)|\leqslant KLMe^{\alpha(t-\sigma)},$$

于是当$\sigma\to\infty$时上式左端趋于零. 又对于$t\leqslant\sigma$,

$$\begin{aligned}\left|\int_\sigma^t e^{A(t-s)}\pi_+f(x(s))ds\right|&\leqslant k\int_t^\sigma e^{\alpha(t-s)}|\pi_+f(x(s))|ds\\&\leqslant KLN\int_t^\sigma e^{\alpha(t-s)}ds\\&=\frac{KLN}{\alpha}[1-e^{\alpha(t-\sigma)}]\\&\leqslant\frac{KLN}{\alpha}.\end{aligned}$$

因此积分$\int_\infty^t e^{A(t-s)}\pi_+f(x(s))ds$存在. 从上面的关于$\pi_+x(t)$的积分方程，推知

$$\pi_+x(t)=\int_\infty^0 e^{-As}\pi_+f(x(t+s))ds.$$

由于$x(t)=\pi_+x(t)+\pi_-x(t)$，由这个关系式与常数变易公式产生(6.4). 用完全相似的方式可证明关系式(6.5). 引理的最后部分可用直接计算来验证，于是完成了证明.

请注意(6.4)、(6.5)中的x_-、x_+不是解在$t=0$的初始值，只是在已知解以后才确定的.

引理 6.2. 假设$\alpha>0,\gamma>0,K,L,M$是非负常数，u是下列两不等式之一的非负、有界连续解：

$$u(t)\leqslant Ke^{-\alpha t}+L\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}u(s)ds$$

$$+M\int_0^{\infty} e^{-\gamma s}u(t+s)ds,\qquad t\geqslant 0, \tag{6.6}$$

$$u(t)\leqslant Ke^{\alpha t}+L\int_t^0 e^{\alpha(t-s)}u(s)ds$$

$$+M\int_{-\infty}^0 e^{\gamma s}u(t+s)ds,\qquad t\leqslant 0. \tag{6.7}$$

如果

$$\beta\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{L}{\alpha}+\frac{M}{\gamma}<1. \tag{6.8}$$

则在任何一种情况下.

$$u(t)\leqslant(1-\beta)^{-1}Ke^{-(\alpha-(1-\beta)^{-1}L)|t|} \tag{6.9}$$

证明 我们只需对u满足(6.6)的情况证明引理.因为通过变换$t\to -t$、$s\to -s$就化(6.7)的讨论为(6.6)的讨论、我们首先说明$t\to\infty$时$u(t)\to 0$. 如果$\delta=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}u(t)$，则$u$的有界性蕴含着$\delta$有限. 如果$\theta$满足$\beta<\theta<1$,则由$\delta>0$推知存在$t_1\geqslant 0$,使得$t\geqslant t_1$时$u(t)\leqslant\theta^{-1}\delta$. 根据(6.6),对于$t\geqslant t_1$,我们有

$$u(t)\leqslant Ke^{-\alpha t}+Le^{-\alpha t}\int_0^{t_1} e^{\alpha s}u(s)ds+\left(\frac{L}{\alpha}+\frac{M}{\gamma}\right)\theta^{-1}\delta. \tag{6.10}$$

由于(6.10)的右边当$t\to\infty$时的上极限$<\delta$,这是一个矛盾. 因此$\delta=0$,且当$t\to\infty$时$u(t)\to 0$.

如果$v(t)=\sup\limits_{s\geqslant t}u(s)$,则由当$t\to\infty$时$v(t)\to 0$,推知对任意$t\in[0,\infty)$，存在$t_1\geqslant t$使得当$t\leqslant s\leqslant t_1$时$v(t)=v(s)=u(t_1)$，当$s>t_1$时$v(s)<v(t_1)$. 根据(6.6),这意味着

$$
\begin{aligned}
v(t)=u(t_1)&\leqslant Ke^{-\alpha t_1}+L\int_0^t e^{-\alpha(t_1-s)}v(s)ds\\
&\quad+L\int_t^{t_1}e^{-\alpha(t_1-s)}v(s)ds+M\int_0^\infty e^{-\gamma s}v(t+s)ds\\
&\leqslant Ke^{-\alpha t_1}+L\int_0^t e^{-\alpha(t_1-s)}v(s)ds+\beta v(t),
\end{aligned}
$$

这里 $\beta=L/\alpha+M/\gamma<1$. 如果 $z(t)=e^{\alpha t}v(t)$,则由 $t_1\geqslant t$ 推知

$$
z(t)\leqslant(1-\beta)^{-1}K+(1-\beta)^{-1}L\int_0^t z(s)ds.
$$

从Gronwall 不等式,我们得 $z(t)\leqslant(1-\beta)^{-1}K\exp(1-\beta)^{-1}Lt$,这就是引理中对于 $u(t)$ 的估计式(6.9).

习题 6.1. 假设 a、b、c 是$[0,\infty)$上的非负连续函数,u 是不等式

$$
u(t)\leqslant a(t)+\int_0^t b(t-s)u(s)ds+\int_0^\infty c(s)u(t+s)ds,\quad t\geqslant 0,
$$

的非负有界连续解,而当 $t\to\infty$ 时 $a(t)\to 0, b(t)\to 0$, $\int_0^\infty b(s)ds<\infty$, $\int_0^\infty c(s)ds<\infty$. 证明若

$$
\int_0^\infty b(s)ds+\int_0^\infty c(s)ds<1
$$

则当 $t\to\infty$ 时 $u(t)\to 0$.

假设Γ是 C^n 的包含零点的任意子集,而 $C^n=\pi_+C^n\oplus\pi_-C^n$ 这里 π_+、π_- 是射影算子, $\pi_+\pi_-=\pi_-\pi_+=0$, 如果在Γ内当 $x\to 0$ 时 $|\pi_+x|/|\pi_-x|\to 0$,我们说Γ在零点与 π_-C^n 相切. 相似地,我们说Γ与 π_+C^n 相切,如果在Γ内当 $x\to 0$ 时 $|\pi_-x|/|\pi_+x|\to 0$.

定理 6.1. 假设 η 是$[0,\infty)$上连续,非减,非负函数,$\eta(0)=0$,令 $\mathscr{L}ip(\eta)$ 记满足下列条件的连续函数 $f: C^n\to C^n$ 的族:

$$
(a)\qquad f(0)=0, \tag{6.11}
$$

(b) $|f(x)-f(y)|\leqslant\eta(\sigma)|x-y|$. $|x|,|y|\leqslant\sigma$.

如果 $x=0$ 是(4.1)的(k)类鞍点，则对于族$\mathscr{L}ip(\eta)$来说，鞍点性质是保存的. 如果对于任意 $f\in\mathscr{L}ip(\eta)$, $U_k=U_k(f)$ 与 $S_{n-k}=S_{n-k}(f)$ 是 (6.3) 的平衡点 $x=0$ 的不稳定流形与稳定流形，则 U_k 在$x=0$ 与 π_+C^n 相切，S_{n-k} 在 $x=0$ 与 π_-C^n 相切，这里 π_+C^n 与 π_-C^n 是(4.1)的鞍点 $x=0$ 的不稳定流形与稳定流形. 并且，存在正的常数 M、γ，使得

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad |x(t)|\leqslant Me^{-\gamma t}|x(0)|,\ t\geqslant 0,\ x(0)\in S_{n-k},\\
&(b)\quad |x(t)|\leqslant Me^{\gamma t}|x(0)|,\ t\leqslant 0,\ x(0)\in U_k.
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

值得考虑定理 6.1 的下述概略的表示图 6.2. 对 $f=0$ 的图形是全局性的，而对 $f\neq0$ 的图形则是局部性的. 在图中，我们指出了(6.3)的不在 U_k 与 S_{n-k} 上的轨道. 实际上，我们不证明不与 U_k 或 S_{n-k} 相交的轨道像图中所示，而只是断言这些轨道在 t 增大过程中必然离开零的一定邻域.

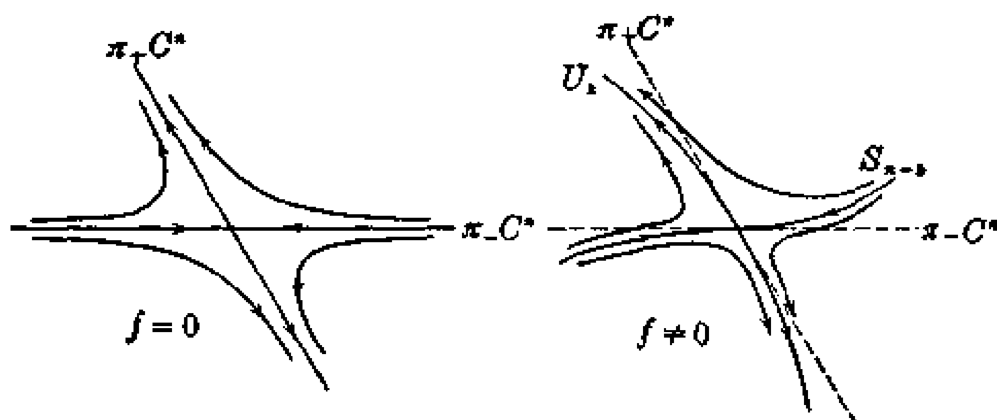


图 Ⅱ.6.2

定理 6.1 的证明. 根据引理 6.1，对于(6.3)的任何在$[0,\infty)$上有界的解 x，存在 $x_-\in\pi_-C^n$ 使得 $x(t)$ 满足 (6.4). 我们先来讨论对于任意充分小的 $x_-\in\pi_-C^n$，在$[0,\infty)$上(6.4)的解的存在性. 由于 π_-, π_+ 是射影，存在常数K_1使得对于所有$x\in C^n$有$|\pi_+x|$

$\leqslant K_1|x|$, $|\pi_- x|\leqslant K_1|x|$. 假设 K、α 是(6.2)中给定的常数，$\eta(\sigma)$ $(\sigma\geqslant 0)$是(6.11)中给定的函数. 取 δ 使得

$$4KK_1\eta(\delta)<\alpha,\ 8K^2K_1\eta(\delta)<3\alpha. \tag{6.13}$$

用这样选定的 δ, 对于 $\pi_- C^n$ 内任何满足 $|x_-|\leqslant\delta/2K$ 的x_-, 定义 $\mathscr{G}(x_-,\delta)$ 为连续函数 $x:[0,\infty)\to C^n$ 的集合，其中 $|x|=\sup\limits_{0\leqslant t<\infty}|x(t)|\leqslant\delta$, $\pi_- x(0)=x_-$. $\mathscr{G}(x_-,\delta)$是由把$[0,\infty)$映入 C^n 的所有有界连续函数赋予一致拓扑而成的 Banach 空间的闭有界子集. 对于任意 $x\in\mathscr{G}(x_-,\delta)$, 定义 Tx 为

$$(Tx)(t)=e^{At}x_-+\int_0^t e^{A(t-s)}\pi_- f(x(s))\,ds$$

$$+\int_{\infty}^0 e^{-As}\pi_+ f(x(t+s))ds, \tag{6.14}$$

这里 $t\geqslant 0$. 由于 x 在$\mathscr{G}(x_-,\delta)$内，容易看出当 $t\geqslant 0$ 时Tx 有定义且连续, $[\pi_- Tx](0)=x_-$. 从(6.2), (6.11), (6.13)得知 $t\geqslant 0$ 时

$$|(Tx)(t)|\leqslant Ke^{-\alpha t}|x_-|+\int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}|\pi_- f(x(s))|ds$$

$$+\int_0^{\infty}Ke^{-\alpha s}|f(x(t+s))|ds$$

$$\leqslant Ke^{-\alpha t}|x_-|+\frac{KK_1}{\alpha}\eta(\delta)|x|[2-e^{-\alpha t}]$$

$$\leqslant K|x_-|+\frac{2KK_1}{\alpha}\eta(\delta)\delta$$

$$<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta.$$

于是$|Tx|<\delta$, 且 T 是 $\mathscr{G}(x_-,\delta)\to\mathscr{G}(x_-,\delta)$的映射.

此外用同样的估计得 $t\geqslant 0$ 时

$$|(Tx)(t)-(Ty)(t)|\leqslant\frac{2KK_1}{\alpha}\eta(\delta)|x-y|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|.$$

因此 T 是 $\mathscr{G}(x_-,\delta)$上的压缩映射，故存在唯一不动点 $x^*(\cdot,\ x_-)$

$\in\mathscr{G}(x_-,\delta)$，它满足(6.4).

用与上述相同的估计，可证函数$x^*(\cdot,x_-)$对x_-连续，并且$x^*(\cdot,0)=0$. 然而，还需要作出$x^*(\cdot,x_-)$对x_-的依赖关系的更精确的估计. 如果我们令$x^*=x^*(\cdot,x_-)$，$\tilde{x}^*=x^*(\cdot,\tilde{x}_-)$，则从(6.4)知$t\geqslant 0$时

$$
\begin{aligned}
|x^*(t)-\tilde{x}^*(t)| &\leqslant Ke^{-\alpha t}|x_- - \tilde{x}_-| \\
&\quad + KK_1\eta(\delta)\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}|x^*(s)-\tilde{x}^*(s)|ds \\
&\quad + KK_1\eta(\delta)\int_0^\infty e^{-\alpha s}|x^*(t+s)-\tilde{x}^*(t+s)|ds.
\end{aligned}
$$

现在我们可以应用引理 6.2 到这个关系式. 在引理 6.2 中，令$\gamma=\alpha$，$M=L=KK_1\eta(\delta)$. 如果 $u(t)=|x^*(t)-\tilde{x}^*(t)|$，$\delta$ 满足(6.13)，又适当地识别引理 6.2 中的常数，则

$$
\begin{aligned}
&|x^*(t,x_-)-x^*(t,\tilde{x}_-)| \\
&\leqslant 2K\exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right)|x_- - \tilde{x}_-|, \qquad t\geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

由于$x^*(\cdot,0)=0$，关系式(6.15)意味着这些解满足形如(6.12a)的关系式，当$t\to\infty$时指数地趋于零.

令$B_{\delta/2K}$记C^n内中心在原点半径是$\delta/2K$的开球. 令S^*_{n-k}记(6.3)的所有这样的解的初始值，它们当$t\geqslant 0$时逗留在B_δ内，且在$B_{\delta/2K}$内取得$\pi_-x(0)$. 根据上面的证明，$S^*_{n-k}=\{x:x=x^*(0,x_-),x_-在(\pi_-C^n)\cap B_{\delta/2K}内\}$. 对于$x_-\in(\pi_-C^n)\cap B_{\delta/2K}$，令$g(x_-)=x^*(0,x_-)$. 函数$g$是由$(\pi_-C^n)\cap B_{\delta/2K}$到$S^*_{n-k}$的连续映射，由

$$
g(x_-)=x_-+\int_\infty^0 e^{-As}\pi_+f(x^*(s,x_-))ds \tag{6.16}
$$

给出. 从(6.2)、(6.11)、(6.13)、(6.15)，我们得知对所有x_-、$\tilde{x}_-\in(\pi_-C^n)\cap B_{\delta/2K}$，

$$
|g(x_-)-g(\tilde{x}_-)|\geqslant|x_- - \tilde{x}_-|
$$

$$-\int_0^\infty Ke^{-\alpha s}K_1\eta(\delta)\,|x^*(s,x_-)-x^*(s,\tilde{x}_-)|ds$$

$$\geqslant |x_- - \tilde{x}_-|\left[1-\frac{4K^2K_1\eta(\delta)}{3\alpha}\right]$$

$$\geqslant \frac{1}{2}|x_- - \tilde{x}_-|.$$

因此 g 是一一对应. 由于 $g^{-1}=\pi_-$ 连续, 推知 g 是一个同胚. 这说明 S^*_{n-k} 同胚于 C^{n-k} 内的开单位球, 特别它的维数是 $n-k$. 然而, S^*_{n-k} 可能不是正向不变量. 如果我们把 S^*_{n-k} 扩充, 加上所有初始值在 S^*_{n-k} 内的解的正轨道, 得到集合 S_{n-k}, 则 S_{n-k} 是正向不变量, 并且根据方程解的唯一性知 S_{n-k} 也同胚于 C^{n-k} 内的开单位球. 如果当 $x\in S_{n-k}$ 时 $|\pi_-x|<\delta/2K$, 集合 S_{n-k} 便与 S^*_{n-k} 相同.

从(6.14)、(6.15)与 $x^*(\cdot,0)=0$, 我们还得到

$$|\pi_+x^*(0,x_-)|$$

$$\leqslant KK_1\int_0^\infty e^{-\alpha s}\eta(|x^*(s,x_-)|)\,|x^*(s,x_-)|ds$$

$$\leqslant KK_1\int_0^\infty e^{-\alpha s}\eta(2K|x_-|)2K|x_-|ds$$

$$=\frac{2K^2K_1}{\alpha}\eta(2K|x_-|)|x_-|.$$

从而当在 S_{n-k} 内 $|x_-|\to 0$ 时 $|\pi_+x^*(0, x_-)|/|x_-|\to 0$, 这说明在 $x=0$ S_{n-k} 与 π_-C^n 相切.

利用关系式(6.5), 可以用完全相似的方式作出集合 U_k. 这就完成了定理的证明.

在定理 6.1 的证明中, 实际上已证明由 $\pi_-C^n\cap B_{\delta/2K}$ 入 S^*_{n-k} 的映射 g 是 Lipschitz 连续的[见关系(6.15)与(6.16)]. 由于若(6.11)满足, 则(6.3)的解也 Lipschitz 连续地依赖于初始数据, 故推知稳定流形 S_{n-k} 与不稳定流形 U_k 都是Lipschitz 连续的; 也

就是说，通过一个 Lipschitz 连续的映射，$S_{n-k}(U_k)$ 同胚于 C^{n-k} (C^k)内的单位球. 从定理 6.1 的证明，显然也看出，在(6.11b)中规定的那种 Lipschitz 条件并不是必要的. 可以只假定

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\gamma|x-y|,$$

这里 γ 满足以 γ 代替 $\eta(\delta)$ 所成的(6.13). 自然，定理中关于相切性的结论在这比较一般的情形下可能不成立.

还可以证明定理 6.1 的更弱的形式，这时不要求函数满足 Lipschitz 条件，而只要求满足

$$|f(x)|\leqslant\mu|x|, \tag{6.17}$$

这里 x 在 $x=0$ 的某个邻域 V 内，而 μ 满足以 μ 代替 $\eta(\delta)$ 所成的(6.13). 事实上，选取 δ 使得 $|x|<\delta$ 蕴涵 $x\in V$，又假定 $\mathscr{G}(x_-,\delta)$ 像前面那样，定义为由所有把$[0,\infty)$映入 C^n 的以 δ 为界的连续函数用在$[0,\infty)$的紧子集上的一致收敛拓扑所成的集合. 如果映射 T 如(6.14)所定义，可以用与前面相同的方式证明 T: $\mathscr{G}(x_-,\delta)\to\mathscr{G}(x_-,\delta)$. 对于任意 $\varepsilon>0$，选取如此大的 τ，使得对于任意 $x, y\in\mathscr{G}(x_-,\delta)$，

$$\begin{aligned}&|(Tx)(t)-(Ty)(t)|\\&\qquad\leqslant KK_1\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}|f(x(s))-f(y(s))|ds\\&\qquad\quad+KK_1\int_0^\tau e^{-\alpha s}|f(x(t+s))-f(y(t+s))|ds\\&\qquad\quad+\varepsilon/2\end{aligned}$$

因此，在$[0,\infty)$中任意给定紧集 G，总可选取 $\delta>0$，使得由$|x(t)-y(t)|<\delta$ 在 G 上成立推知$|(Tx)(t)-(Ty)(t)|<\varepsilon$ 在 G 上成立. 这意味着 T 按在紧集上的一致收敛拓扑而言，在$\mathscr{G}(x_-,\delta)$上连续. 由于$(Tx)(t)$是方程$\dot{z}=Az+f(x(t))$ 的解，又对于所有 $x\in\mathscr{G}(x_-,\delta)$有$|Tx|\leqslant\delta$，推知 $|d(Tx)(t)/dt|$ 一致有界，而 T 是由$\mathscr{G}(x_-,\delta)$ 入 $\mathscr{G}(x_-,\delta)$的完全连续映射. 利用 Schauder-Tychonov

定理，可以断言T在$\mathscr{G}(x_-,\ \delta)$内有不动点$x^*(\cdot,\ x_-)$. 此外由于$x^*(\cdot,x_-)$满足(6.4)，推知

$$|x^*(t,x_-)|\leqslant Ke^{-\alpha t}|x_-|+KK_1\mu\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}|x^*(s,x_-)|ds$$
$$+KK_1\mu\int_0^\infty e^{-\alpha s}|x^*(t+s,x_-)|ds.$$

再利用引理 6.2，得

$$|x^*(t,x_-)|\leqslant 2K\exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right)|x_-|,\quad t\geqslant 0. \tag{6.18}$$

又恰好与定理 6.1 的证明中一样，得到

$$|\pi_+x^*(\theta,x_-)|\leqslant\frac{2K^2K_1}{\alpha}\mu|x_-|. \tag{6.19}$$

于是(6.3)的满足$t\geqslant 0$, $|x(t)|\leqslant\delta$及$|\pi_-x(0)|\leqslant\delta/2K$的所有解$x(t)$当$t\to\infty$时指数地趋于零，且对于合适的$x_-$真正满足(6.19). 如果我们用$S^*$记这些解的初始值集合，且通过添加所有初始值在$S^*$内的解的正轨道，把$S^*$拓广为集合$S$，则称$S$为(6.3)的稳定流形是合理的.

如果f满足较强的条件

$$f(x)=o(|x|)\quad 当|x|\to 0, \tag{6.20}$$

则存在当$\sigma\geqslant 0$时连续的$\eta(\sigma)$ $(\eta(0)=0)$，使得$|x|\leqslant\sigma$时$|f(x)|\leqslant\eta(\sigma)|x|$. 估计式(6.19)可以改进为

$$|\pi_+x^*(0,x)|\leqslant\frac{2K^2K_1}{\alpha}\eta(2K|x_-|)|x_-|. \tag{6.21}$$

关系式(6.21)说明S在$x=0$与π_-C^n相切. 用相同的方式，得到不稳定流形U，它在$x=0$与π_+C^n相切. 性质$S\cap U=\{0\}$仍旧成立，但不能断言S的维数是$n-k$，U的维数是k.

如果f满足条件(6.17)，估计式(6.19)说明稳定流形必然落在包含π_-C的一个范围内，这个范围由两张当$\mu\to 0$时趋于π_-C的平面所界定. 同样的说明适用于不稳定流形.

如果 f 满足(6.20)，则(6.3)的稳定流形与不稳定流形在 $x=0$ 跟 (4.1) 的稳定流形与不稳定流形相切这一事实意味着：对于 $\pi_- C^n$ 的与中心在原点，半径等于一的球相交的任意邻域 N，存在 $x=0$ 的邻域 V 使得(6.3)的与邻域 V 有关的稳定流形落在 N 内. 同样的说明适用于不稳定流形. 这个说明的重要结论是下述推论，它的前一部分是定理 2.4 的特殊情形.

推论 6.1. 假设 $f: C^n \to C^n$ 连续，当 $|x|\to 0$ 时 $f(x)=o(|x|)$. 如果 A 的特征值的实部都是负的，则(6.3)的解 $x=0$ 一致渐近稳定. 如果 A 有一个正实部的特征值，则解 $x=0$ 不稳定.

下面这个由 C. Olech 提出的例子说明，当扰动是连续的，并且当 $|x|\to 0$ 时是 $o(|x|)$，但是在 $x=0$ 不可微的时候，稳定流形与不稳定流形的维数可能增大. 令 $\xi(x)(-\infty<x<\infty)$ 是在 $x=0$ 的邻域中有连续的二阶导数的任意函数，$\xi(0)=\xi'(0)=0$，当 $x\neq 0$ 时 $\xi(x)\neq 0$，又当 $|x|\to 0$ 时 $\xi(x)+x\xi'(x)=o(|x|)$. 对于任意 a，令 $\psi(a,y)$ 是任意一个这样的函数，$-\infty<y<\infty$ 时 $0\leqslant\psi(a,y)\leqslant 1$，$\psi(a,0)=1$，$\psi(a,-a)=0$. 考虑二阶方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-x_1,\\ \dot{x}_2&=x_2-\psi(\xi(x_1),x_2-\xi(x_1))[\xi(x_1)+x_1\xi'(x_1)].\end{aligned}\tag{6.22}$$

在上述关于 ξ,ψ 的假定之下，我们看出扰动当 $|x|\to 0$ 时是 $o(|x|)$，这里的 $x=(x_1,x_2)$. 此外，$x_2=0$、$x_1=e^{-t}a$ 与 $x_2=\xi(x_1)$、$x_1=e^{-t}a$（这里 a 是任意数）都是(6.22)的解. 这些解当 $t\to\infty$ 时趋于零，对应的轨道属于 $x=0$ 的稳定流形，显然这些轨道是不相同的. 在 $x=0$ 附近由初始值界于曲线 $x_2=0$ 与 $x_2=\xi(x_1)$（见图 6.3）之间的解轨道组成的扇形必然也属于(6.22)的解 $x=0$ 的稳定流形. 事实上，容易说明扰动当 $|x|\to 0$ 时是 $o(|x|)$ 这一事实蕴含着存在一个包围正 x_1 轴的锥，使得在 $x=0$ 附近任何轨道的切向量不可能垂直于 x_1 轴. 由此直接产生上述结论.

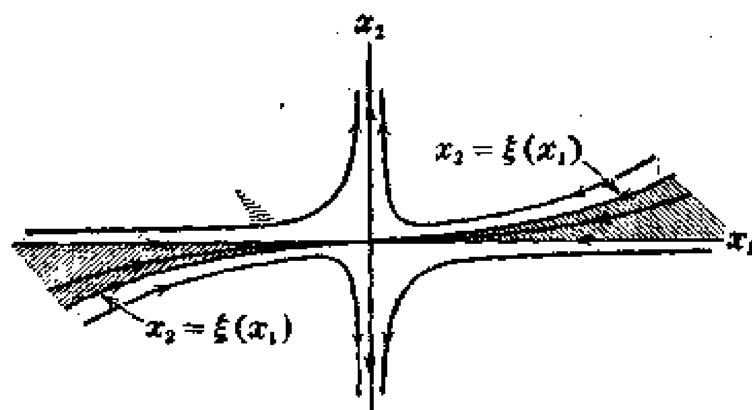


图 Ⅲ.6.3

Ⅲ.7. 线性周期系统

考虑齐次的线性周期系统

$$\dot{x}=A(t)x,\quad A(t+T)=A(t),\quad T>0. \tag{7.1}$$

这里 $A(t)$是 t 的连续①的$n\times n$ 实或复矩阵函数. 在本节里，我们的第一个目的是完整地描述(7.1)的解的一般结构。

引理 7.1. 如果 C 是 $n\times n$ 矩阵，$\det C\neq 0$, 则存在矩阵 B 使得 $C=e^B$.

证明 如果 P 是非奇异矩阵，并且存在矩阵 B 使得 $C=e^B$，则 $P^{-1}CP=e^{P^{-1}BP}$. 因此，我们可以假定 C 是 Jordan 标准形，即

$$C=\operatorname{diag}(C_1,\cdots,C_p),$$

$$C_j=\lambda_j I+R_j,$$

$$R_j=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\&\cdots&&&\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

根据假设，每个 $\lambda_j\neq 0,\ j=1,2,\cdots,p$. 为了证明引理，只需说明每

① 作这个假定仅仅是为了简便. 对于 $A(t)$是周期的并且 Lebesgue 可积的情形，如果要求在一个 Lebesgue 测度为零的集合以外满足(7.1)，理论也是对的. 证明也不要作改变.

个 C_j 可以写作 $C_j=e^{B_j}$. 因此, 我们去掉指标而设 $C=\lambda I+R$, 这里 $\lambda\neq0$, R 是与上面的 R_j 相同类型的矩阵; 特别是对于所有 $k\geqslant m$(m 为某整数), $R^k=0$. 由于 $\lambda\neq0$, $C=\lambda(I+R/\lambda)$. 令

$$B=(\log\lambda)I+S,$$

$$S=-\sum_{j=1}^{m}\frac{(-R)^j}{j\lambda^j}.$$

矩阵 S 是一个矩阵幂级数, 它是在 $\log(1+t)$ 的在 $t=0$ 附近的幂级数中用 R/λ 代替 t 得到的. 由于 $k\geqslant m$ 时 $R^k=0$, 收敛性不成问题. 另一方面, 在 e^B 的幂级数中用代入法可以直接证明 $C=e^B$. 引理证毕.

习题 7.1. 对于任意行列式 $\neq0$ 的实矩阵 D, 证明存在实矩阵 B 使得 $e^B=D^2$. 如果 C 是引理 7.1 中的实矩阵, 又存在实矩阵 B 使得 $e^B=C$, 是否必有实矩阵 D 使得 $C=D^2$?

定理 7.1. (Floquet). (7.1) 的每个基本矩阵解 $X(t)$ 的形式是

$$X(t)=P(t)e^{Bt}, \tag{7.2}$$

这里的 $P(t)$、B 是 $n\times n$ 矩阵, 对所有 t 有 $P(t+T)=P(t)$, 而 B 是常数矩阵.

证明 假设 $X(t)$ 是 (7.1) 的基本矩阵解. 则由于 $A(t)$ 是周期为 T 的, $X(t+T)$ 还是一个基本矩阵解. 因此存在非奇异矩阵 C 使得

$$X(t+T)=X(t)C.$$

根据引理 7.1, 存在矩阵 B 使得 $C=e^{BT}$. 对此矩阵 B, 令 $P(t)=X(t)e^{-Bt}$, 则

$$P(t+T)=X(t+T)e^{-B(t+T)}=X(t)e^{BT}e^{-B(t+T)}=P(t).$$

定理证毕.

推论 7.1. 存在变量的非奇异周期变换, 把 (7.1) 变为常系数

方程.

证明 假设 $P(t)$、B 由(7.2)定义，在(7.1)中令 $x=P(t)y$. 关于 y 的方程是

$$\dot{y}=P^{-1}(AP-\dot{P})y.$$

由于 $P=Xe^{-Bt}$，推知 $\dot{P}=AP-PB$，这就证明了结论.

习题 7.2. 如果(7.1)中的 $A(t)$ 是实矩阵，又要求 $P(t+2T)=P(t)$；证明表示式(7.2)中的 B 总可以取为实矩阵.

定理 7.1 说明(7.1)的任意解是形如 $e^{\lambda t}p(t)$ 的函数的线性组合，这里的 $p(t)$ 是 t 的多项式，其系数是 t 的周期函数，周期与微分方程系数的相同.

假定 $X(t)$ 是(7.1)的基本矩阵解，$X(t+T)=X(t)C$，我们称非奇异矩阵 C 为(7.1)的单值矩阵. 单值矩阵的特征值 ρ 称为(7.1)的特征乘数，任何满足 $\rho=e^{\lambda T}$ 的 λ 称为(7.1)的特征指数. 请注意特征指数不是唯一确定的，但特征乘数却是的. 特征指数的实部也是唯一确定的，我们总可以取指数 λ 作为 B 的特征值，这里的 B 是任意使 $C=e^{BT}$ 的矩阵. 特征乘数的值不依赖于单值矩阵的特殊选法；也就是说，不依赖于用以确定单值矩阵的特殊基本解. 事实上，如果 $X(t)$ 是基本矩阵解，$X(t+T)=X(t)C$，而 $Y(t)$ 是任意另外的基本矩阵解，则存在非奇异矩阵 D 使得 $Y(t)=X(t)D$. 于是，$Y(t+T)=X(t+T)D=X(t)CD=Y(t)D^{-1}CD$，于是 $Y(t)$ 的单值矩阵是 $D^{-1}CD$. 另一方面，彼此相似的矩阵的特征值相同. 我们将总是对 $X(T)$ 用单值矩阵这个术语，这里的 $X(t)$ 是(7.1)的基本矩阵解，$X(0)=I$.

引理 7.2. 复数 λ 是(7.1)的特征指数，当且仅当(7.1)有形如 $e^{\lambda t}p(t)$ $(p(t+T)=p(t))$ 的非平凡解. 特别，(7.1)有周期为 T (或 $2T$)的周期解，当且仅当有特征乘数 $+1$(或 -1).

证明 如果 $e^{\lambda t}p(t)$ $(p(t+T)=p(t)\neq 0)$ 满足(7.1)，由定理

7.1 推知有 $x_0\neq 0$，使得 $e^{\lambda t}p(t)=P(t)e^{Bt}x_0$. 于是，$P(t)e^{BT}\times[e^{BT}-e^{\lambda T}I]x_0=0$，因之 $\det(e^{BT}-e^{\lambda T}I)=0$. 反之，如果有 λ 使得 $\det(e^{BT}-e^{\lambda T}I)=0$，则可选取 $x_0\neq 0$ 使得 $(e^{BT}-e^{\lambda T}I)x_0=0$. 可以选取 (7.2) 的表示式使得 λ 确实是 B 的特征值. 则对于所有 t，$e^{Bt}x_0=e^{\lambda t}x_0$，而 $P(t)e^{Bt}x_0=P(t)x_0e^{\lambda t}$ 是所要的解. 最后一个断言则是显然成立的.

引理 7.3. 如果 $\rho_j=e^{\lambda_j T}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是(7.1)的特征乘数，则

$$\prod_{j=1}^{n}\rho_j=\exp\left(\int_0^T trA(s)ds\right),$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\equiv\frac{1}{T}\int_0^T trA(s)ds\left(\mathrm{mod}\ \frac{2\pi i}{T}\right). \tag{7.3}$$

证明 假设 C 是(7.1)的矩阵解 $X(t)(X(0)=I)$ 的单值矩阵. 则由引理 1.5 推知

$$\det C=\det X(T)=\exp\left(\int_0^T trA(s)ds\right).$$

现在从特征乘数与特征指数的定义便可直接推得引理的结论.

定理 7.2. (i) 系统(7.1)一致稳定的必要充分条件是(7.1)的特征乘数的模 $\leqslant 1$(即特征指数的实部 $\leqslant 0$)且模 $=1$(即特征指数的实部 $=0$)的乘数有单初等因子.

(ii) 系统(7.1)一致渐近稳定的必要充分条件是(7.1)的所有特征乘数的模 <1(即所有特征指数的实部 <0). 如果是这种情形，而 $X(t)$ 是(7.1)的矩阵解，则存在 $K>0$、$\alpha>0$，使得

$$|X(t)X^{-1}(s)|\leqslant Ke^{-\alpha(t-s)},\quad t\geqslant s.$$

证明 如果利用定理 7.1，这个定理的证明实际上与定理 4.2 的证明相同.

乍一看来，线性周期方程似乎与常系数线性方程同样简单. 然

而，它们之间有很重要的区别——只有在知道(7.1)的解以后才能确定特征指数，而且在特征指数与矩阵$A(t)$之间没有明显的关系．下面这个例子说明不能用矩阵$A(t)$的特征值来确定解的渐近性态。

例7.1. (Markus 与Yamabe[1])如果

$$A(t)=\begin{bmatrix}-1+\frac{3}{2}\cos^2 t & 1-\frac{3}{2}\cos t\sin t\\ -1-\frac{3}{2}\sin t\cos t & -1+\frac{3}{2}\sin^2 t\end{bmatrix}, \tag{7.4}$$

则$A(t)$的特征值是$\lambda_1(t)=[-1+i\sqrt{7}]/4$, $\lambda_2(t)=\bar{\lambda}_1(t)$，特别它们的实部是负的．另一方面，可以直接验证

$$(-\cos t, \sin t)\exp\left(\frac{t}{2}\right)$$

是(7.1)当$A(t)$由(7.4)给出时的解，此解当$t\to\infty$时无界，一个特征乘数是e^{π}，由于(7.3)蕴含着乘数的乘积等于$e^{-\pi}$，故另一乘数是$e^{-2\pi}$.

确定线性周期系统的特征乘数或指数，是一个极为困难的问题．除开对纯量的二阶方程，或较一般地，对于 Hamilton 系统与典型系统以外，所知极少，甚至连形如$\dot{x}=Ax+\varepsilon\Phi(t)x$的系统，这里$\varepsilon$是小参数，$A$是常数矩阵，而$x$是高于二维的向量，要确定它的特征乘数也极困难，呈现出惊人的特性．在后面的一章中将用例子说明这一点．

Ⅲ.8. Hill 方程

在本节里，我们比较详细地讨论 Hill 方程

$$\ddot{y}+(a+\phi(t))y=0,\quad \phi(t+\pi)=\phi(t) \tag{8.1}$$

的稳定性，这里的a是常数，$\phi(t)$是实的连续函数．实际上，如果ϕ是可积的与有界的，理论并没有改变，但在这种情况下，我们必

须说方程是几乎处处满足的.

我们的终极目的是描写使方程稳定的参数 a 的值的特征. 由上一节推知这等价于确定(8.1)的特征乘数作为 a 的函数的定性结构.

方程(8.1)等价于系统

$$\dot{x}=[C(a)+A(t)]x,\quad A(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\phi(t) & 0\end{bmatrix},$$

$$x=\begin{bmatrix}y\\ \dot{y}\end{bmatrix},\tag{8.2}$$

$$C(a)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a & 0\end{bmatrix}.$$

假设

$$X(t)\xlongequal{\text{def}}\begin{bmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t)\end{bmatrix},\quad X(0)=I,\tag{8.3}$$

是(8.2)的在 $t=0$ 的主矩阵解. (8.2)的特征乘数就是矩阵 $X(\pi)$ 的特征值; 也就是说, 是方程

$$\det(X(\pi)-\rho I)=0$$

的根. 由于 $tr[C(a)+A(t)]=0$, 由(7.3)推知特征乘数是方程

$$\rho^2-2B(a)\rho+1=0\tag{8.4}$$

的根, 这里

$$2B(a)=trX(\pi)=y_1(\pi)+\dot{y}_2(\pi),$$

y_1、y_2 是(8.1)的上已定义的解. 根据第一章, 函数 $B(a)$ 对参数 a 是连续的.

鉴于引理7.2与(8.4)中乘数 ρ_1、ρ_2, 满足 $\rho_1\rho_2=1$, 方程(8.1)仅当 $|\rho_1|=|\rho_2|=1$ 时稳定. 下面这个引理说明如果 a 是复数, 就不会是这种情形.

引理 8.1. 如果 a 是复数, $Ima\neq0$, 方程(8.1)不稳定, (8.4)

没有模等于一的特征乘数.

证明 如同上面说明的,仅当(8.1)的两个特征乘数的模是一的时候,它是稳定的. 因此,如果我们说明了当 a 是复数时, 没有特征乘数的模等于一, 这就证明了引理. 如果有个特征乘数的模为一,则由引理 7.2 推知(8.1)必有形如 $e^{i\lambda t}p(t)$ 的解,这里的 λ 是实数,而 $p(t+\pi)=p(t)\neq 0$. 如果 $e^{i\lambda t}p(t)=u+iv$, $a=\alpha+i\beta$, u, v, α, β 是实数,则

$$\ddot{u}+[\alpha+\phi(t)]u=\beta v,$$

$$\ddot{v}+[\alpha+\phi(t)]v=-\beta u.$$

这意味着

$$\ddot{u}v-\ddot{v}u=\beta(u^2+v^2),$$

而通过积分,

$$\beta\int_0^t |p(s)|^2 ds \overset{\text{def}}{=\!=} \beta\int_0^t [u^2(s)+v^2(s)]ds$$

$$=\dot{u}(t)v(t)-\dot{v}(t)u(t)+c,$$

这里 c 是常数. 由于右边对所有 t 有界,而 p 是周期为 π 的函数,除非 $\beta=0$ 或 $p=0$,否则便产生了矛盾. 这便证明了引理.

引理 8.2. 方程 $B^2(a)=1$ 只有实解. $B(a)=1$(或 -1)等价于说(8.1)有周期为 π(或 2π)的周期解. 如果 a 是实数,则 $B^2(a)<1$ 意味着(8.1)的所有解有界,并且在 $(-\infty, \infty)$ 上是拟周期的. 如果 a 是实数且 $B^2(a)>1$,则(8.1)有无界解.

证明 (8.4)的根 ρ_1、ρ_2 是 $\rho_1=B(a)+\sqrt{B^2(a)-1}$, $\rho_2=B(a)-\sqrt{B^2(a)-1}$. 如果 $B^2(a)=1$,则 $\rho_1=\rho_2=\pm 1$,并且由引理 7.2 产生了关于周期解的论点. 根据引理 8.1, 这意味着 $B^2(a)=1$ 只可能有实解. 如果 a 是实数,则 $B(a)$ 是实的并且 $B^2(a)<1$ 等价于 $\rho_1=\bar{\rho}_2$, $\rho_1\neq\rho_2$, $|\rho_1|=1$. 由引理 7.2 推知存在着两个线性无关的拟周期解. 于是每个解是拟周期的. 如果 $B^2(a)>1$, 则

一个特征乘数>1，另一个<1．利用定理 7.2 可完成引理的证明．

引理 8.1 与 8.2 意味着 (8.1) 决不可能是渐近稳定的．在继续下去的讨论中，参数 a 取为实数．如果对于区间 I 的每个 a，方程(8.1)是稳定的(不稳定的)，就称 I 是(8.1)的稳定(不稳定)a区间．从引理 8.2 得知，只有在满足 $B^2(a)=1$ 的 a，才可能发生由稳定 a 区间向不稳定 a 区间的转移．因此，基本问题是找满足 $B^2(a)=1$ 的 a，并讨论函数 $B(a)$ 在这些值的邻域里的性质．下面的定理 8.1 定性地描述了(8.1)的稳定 a 区间与不稳定 a 区间在实直线上的摆法，下面诸引理导致这个定理的证明．

引理 8.3．如果对所有 $t\in[0,\pi]$有 $a+\phi(t)\leqslant 0$，则(8.1)有无界解．如果 $a+\phi(t)$还不恒等于零，则 $B(a)>1$．

证明 与前面一样，设 $y_1(t)$是(8.1)的满足 $y_1(0)=1$，$\dot{y}_1(0)=0$ 的解，又令 $\psi(t)=-(a+\phi(t))$，则$\psi(t)\geqslant 0$．从(8.1)

$$(\dot{y}_1(t))^2=2\int_0^t \psi(s)y_1(s)\dot{y}_1(s)ds \tag{8.5}$$

对所有 $t\geqslant 0$ 成立．由于 $y_1(0)=1$，故 $\ddot{y}_1(0)=\psi(0)y_1(0)\geqslant 0$．于是在区间 $0\leqslant t\leqslant\eta$ 上 $\dot{y}_1(t)\geqslant 0$．如果对所有 $t\geqslant 0$ 有 $\dot{y}_1(t)=0$，则 $y_1(t)=1$ 是(8.1)的解，这意味着对所有 t 有 $a+\phi(t)=0$，反之亦然．在这种情况下，由于 $y(t)=t$ 是解，故方程有无界解．假定 $a+\phi(t)$不恒等于零，又设 η 是这样的，对于 $0\leqslant t\leqslant\eta$ 有 $\dot{y}_1(t)=0$，而对于任意 $\tau>0$，有 $t\in(\eta,\ \eta+\tau)$使得 $\dot{y}_1(t)\neq 0$．这样的 η 总是存在的．可以取 τ 如此小，以致 $0\leqslant s\leqslant\eta+\tau$ 时 $y_1(s)>0$．由于 $\psi(s)\geqslant 0$，从(8.5)推知在$(\eta,\ \eta+\tau)$上 $\dot{y}_1(t)>0$．(8.5)的右边是 t 的非降函数，因此对所有 $t>\eta$ 有 $\dot{y}_1(t)>0$．并且 $\dot{y}_1(t)$在$t\geqslant\eta$ 上是单调增加函数．最后，对于 $t\geqslant\eta+\tau(\tau>0)$有

$$y_1(t)=1+\int_0^t \dot{y}_1(s)ds$$

$$\geqslant 1+\int_{\eta+\tau}^{t}\dot{y}_1(s)ds\geqslant 1+\dot{y}_1(\eta+\tau)(t-\eta-\tau)$$

由于 $\dot{y}_1(\eta+\tau)>0$，这说明 $y_1(t)$无界，也就证明了引理的第一部分.

为证明引理的第二部分，我们首先回忆，我们刚才已证明对所有 t 有 $\dot{y}_1(t)\geqslant 0$. 还有 $y_1(\pi)>1$. 现在，考虑(8.1)的满足 $y_2(0)=0$, $\dot{y}_2(0)=1$ 的解 $y_2(t)$. 函数 $y_2(t)$将满足

$$(\dot{y}_2(t))^2=1+2\int_0^t\psi(s)y_2(s)\dot{y}_2(s)ds.$$

由于 $\psi(s)\geqslant 0$ 且不恒等于零，得知 $\dot{y}_2(\pi)>1$. 因此，$2B(a)=y_1(\pi)+\dot{y}_2(\pi)>2$，引理证毕.

引理 8.3 说明，如果要(8.1)的解保持有界，$a+\phi(t)$必须取某些正值. 由于 ϕ 有界，存在 a^* 使得 $a^*+\phi(t)<0$. 于是$B(a)>1$，且方程(8.1)对$-\infty<a<a^*$ 不稳定. 下面我们说明不稳定 a区间是上有界的.

引理 8.4. 函数 $B(a)-1$、$B(a)+1$ 分别有无穷多个实零点 $\{a_0<a_1<a_2<\cdots\}$、$\{a_1^*<a_2^*<\cdots\}$，并且当 $k\to\infty$ 时 a_k、a_k^* 趋于 $+\infty$.

证明 我们现在来说明 $B(a)$ 是 1/2 阶的整函数，即：$B(a)$ 是一个整函数，并且对于任意 $\varepsilon>0$，当 $|a|\to\infty$ 时有 $|B(a)|\times\exp[|a|^{-\varepsilon-1/2}]\to 0$，又对于 $\varepsilon<0$，$|B(a)|\exp[|a|^{-\varepsilon-1/2}]$ 是无界的. 由于任何分数阶的整函数必有无穷多个零点，推知函数 $B(a)-1$、$B(a)+1$ 必有无穷多个零点. 由引理 8.2 得知这些零点是实数. 零点的唯一可能的聚点是 $\pm\infty$，但由引理 8.3 后的说明，推知聚点必是$+\infty$.

如果 $X(t)$由(8.3) 定义，则

$$X(t)=I+\int_0^t[C(a)+A(s)]X(s)ds.$$

用$(TX)(t)$来记这个积分方程的右边，又定义函数序列$\{X^{(k)}\}$为$X^{(0)}=I, X^{(k+1)}=TX^{(k)}$，$k=0, 1, \cdots$. 每个$X^{(k)}$是$a$的整函数. 假设$a$属于紧集$V$，又$t$在紧集$U$内. 恰如证明$e^{At}$的幂级数表达式那样(见第4节)，可证明序列$X^{(k)}(t)=X^{(k)}(t, a)$对于$t\in U$, $a\in V$一致收敛到$X(t)=X(t, a)$. 因此,$X(t, a)$是a的整函数,并且$B(a)$是a的整函数.

为了证明阶的关系,令$\omega^2=a$，并在(8.2)中把$A(t)x$当作强迫函数来考虑常数变易公式. 如果y_1、y_2定义如上,则

$$y_1(t,a)=\cos\omega t-\int_0^t \omega^{-1}\sin\omega(t-s)\phi(s)y_1(s,a)ds, \tag{8.6}$$

$$y_2(t,a)=\omega^{-1}\sin\omega t-\int_0^t \omega^{-1}\sin\omega(t-s)\phi(s)y_2(s,a)ds.$$

由于$t\geqslant 0$, $|\omega|\geqslant 1$时, $|\omega^{-1}\sin\omega t|\leqslant e^{|\omega|t}$, $|\cos\omega t|\leqslant e^{|\omega|t}$,得知$0\leqslant t\leqslant\pi$时

$$|y_j(t,a)|\leqslant e^{|\omega|t}+K\int_0^t e^{|\omega|(t-s)}|y_j(s,a)|ds, j=1,2,$$

其中的K是ϕ的一个上界. 如果$z(t)=e^{-|\omega|t}|y_j(t,a)|$,则

$$z(t)\leqslant 1+K\int_0^t z(s)ds$$

由Gronwall不等式推知$0\leqslant t\leqslant\pi$时$z(t)\leqslant e^{Kt}\leqslant e^{K\pi}$, 因此$0\leqslant t\leqslant\pi$时$|y_j(t,a)|\leqslant e^{K\pi}e^{|\omega|t}$. 由于$\dot{y}_2(t,a)$满足

$$\dot{y}_2(t,a)=\cos\omega t-\int_0^t \cos\omega(t-s)\phi(s)y_2(s,a)ds,$$

我们得知存在常数L,使当$0\leqslant t\leqslant\pi$时$|\dot{y}_2(t, a)|\leqslant Le^{|\omega|t}$. 因此,$B(a)$的阶$\leqslant 1/2$.

为了证明阶$\geqslant 1/2$,假设对所有t有$\phi(t)\leqslant 1$,这不损一般性. 事实上,我们总可用$\phi-M-1$代替ϕ,用$a+M+1$代替a. 这里的M是$|\phi(t)|$的界. 还可取$a<0$以致$\sqrt{a}=i\mu$, $\mu>0$. 当$a<0$, $\phi(t)\leqslant -1$时,在引理8.3的证明中已说明$t>0$时$y_1(t, a)>1$,

$\dot{y}_2(t,a)>1$. 由这个事实，$-\phi(t)\geqslant 1$ 及(8.6)推知

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t,a)&\geqslant\int_0^t \cosh\mu(t-s)y_1(s,a)ds\\&\geqslant\int_0^t \cosh\mu(t-s)ds\\&=\frac{\sinh\mu t}{\mu}.\end{aligned}$$

因而对所有$[0,\ \pi]$内的 t，$y_1(t,\ a)\geqslant(e^{\mu t}-1)/2\mu^2+1$. 由于 $\dot{y}_2(\pi,a)\geqslant 0$，得知 $B(a)$ 的阶至少是 1/2. 这就证完了引理.

引理 8.5. 如果 b 是 $B(a)=1$ 的使 $B'(b)\stackrel{\text{def}}{=}dB(b)/db\leqslant 0$ 的根，则只要在 $b<a<c^*$ 上 $B(a)>-1$，在这个区间上就有 $B'(a)<0$. 如果 b^* 是 $B(a)=-1$ 的使 $B'(b^*)\leqslant 0$ 的根，则只要在 $b^*<a<c$ 上 $B(a)<1$，在这个区间上就有 $B'(a)>0$.

证明 设 $X(t,a)=X(t)$ 如(8. 3)中所定义. 从引理 1.5 知，对所有 t 有 $\det X(t)=1$，于是

$$X^{-1}(t)=\begin{bmatrix}\dot{y}_2(t) & -y_2(t)\\ -\dot{y}_1(t) & y_1(t)\end{bmatrix}.$$

又根据定理 *I*.3.3 与线性系统的常数变易公式，

$$\frac{\partial X(t,a)}{\partial a}=X(t,a)\int_0^t X^{-1}(s,a)\frac{\partial C(a)}{\partial a}X(s,a)ds,$$

这里的 $C(a)$ 是(8.2)中的矩阵. 于是

$$\frac{\partial C(a)}{\partial a}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

同样可得

$$\frac{\partial^2 X(t,a)}{\partial a^2}=2X(t,a)\int_0^t X^{-1}(s,a)\frac{\partial C(a)}{\partial a}\frac{\partial X(s,a)}{\partial a}ds.$$

根据 $B(a)$ 的定义，这些关系式意味着

$$2B'(a)=(\alpha-\dot{\beta})\int_0^\pi y_1y_2ds-\beta\int_0^\pi y_1^2ds+\dot{\alpha}\int_0^\pi y_2^2ds,\quad(8.7)$$

$$B''(a)=\alpha\int_0^\pi y_2\frac{\partial y_1}{\partial a}ds-\beta\int_0^\pi y_1\frac{\partial y_1}{\partial a}ds+\dot{\alpha}\int_0^\pi y_2\frac{\partial y_2}{\partial a}ds$$
$$-\dot{\beta}\int_0^\pi y_1\frac{\partial y_2}{\partial a}ds,$$

这里为了记号简便，已令 $\alpha=\alpha(a)=y_1(\pi,a)$，$\beta=\beta(a)=y_2(\pi,a)$，$\dot{\alpha}=\dot{\alpha}(a)=\dot{y}_1(t,a)$，$\dot{\beta}=\dot{\beta}(a)=\dot{y}_2(\pi,a)$. 利用对所有 t，$\det X(t)=1$ 这一事实，我们得

$$4(B^2-1)=(\alpha+\dot{\beta})^2-4(\alpha\dot{\beta}-\beta\dot{\alpha})=(\alpha-\dot{\beta})^2+4\dot{\alpha}\beta. \quad (8.8)$$

假设 b 使得 $B(b)=1$ 与 $B'(b)\leqslant 0$. 我们要证明存在 $\delta>0$，使得 $b<a<b+\delta$ 时 $B'(a)<0$. 如果 $B'(b)<0$，这样的 δ 显然存在. 假设 $B'(b)=0$. $B(b)=1$，定义

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

则由(8.7)、(8.8)推知

$$\int_0^\pi[|\dot{\alpha}|^{1/2}y_2+\operatorname{sgn}(\alpha-\dot{\beta})|\beta|^{1/2}y_1]^2ds=0,$$

于是 $0\leqslant s\leqslant\pi$ 时 $|\dot{\alpha}|^{1/2}y_2(s)+\operatorname{sgn}(\alpha-\dot{\beta})|\beta|^{1/2}y_1(s)=0$. 由于$y_1$、$y_2$ 线性无关，得 $\dot{\alpha}=0$. 这个事实连同(8.8)与 $B(b)=1$ 意味着 $\alpha=\dot{\beta}$. 由于$B'(b)=0$，由关系式(8.7)推知 $\beta=0$. $\det X(\pi)=1$ 这一事实又意味着 $\alpha=\dot{\beta}=1$. 又在(8.7)中直接计算与作分部积分，得

$$B''(b)=\left(\int_0^\pi y_1y_2ds\right)^2-\int_0^\pi y_1^2ds\int_0^\pi y_2^2ds.$$

由于函数 y_1、y_2 线性无关，从Schwarz 不等式得知 $B''(b)<0$. 因此，必然存在 $\delta>0$ 使得 $b<a<b+\delta$ 时 $B'(a)<0$.

现在假设存在 c^*，使得 $b<a<c^*$ 时 $B'(a)<0$ 而 $B'(c^*)=0$，且 $B(c^*)>-1$. 则 $B^2(c^*)-1<0$，而由(8.8)得知 $\dot{\alpha}(c^*)\ \beta(c^*)$

<0，特别有 $\dot{\alpha}(c^*)\neq 0$. 从(8.7)与(8.8)容易证明

$$2B'(a)=[\operatorname{sgn}\dot{\alpha}]\left\{\int_0^\pi\left(|\dot{\alpha}|^{1/2}y_2+(\operatorname{sgn}\dot{\alpha})\frac{\alpha-\dot{\beta}}{2|\dot{\alpha}|^{1/2}}y_1\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{B^2-1}{|\dot{\alpha}|}\int_0^\pi y_1^2\,ds\right\}$$

对任意使 $\dot{\alpha}(a)\neq 0$ 的 a 成立．由于 $B^2(c^*)<1$、$\dot{\alpha}(c^*)\neq 0$，显然有 $B'(c^*)\neq 0$，这是一个矛盾．这就对 $B(b)=1$ 的情形证明了引理．用实质上相同的方式来处理 $B(b)=-1$ 的情形，就完成引理的证明．

在这个引理证明的中间部分，证明了下述关系．

引理 8.6. 如果对于特殊的 b 有 $B^2(b)=1$、$B'(b)=0$，则 $B(b)=1$ 时 $B''(b)<0$，$B(b)=-1$时 $B''(b)>0$．特别，$B^2(b)=1$ 的根最多是二重的．b 是二重根的必要充分条件是

$$y_1(\pi,b)=\dot{y}_2(\pi,b)=1,\ \dot{y}_1(\pi,b)=y_2(\pi,b)=0.$$

引理 8.7. 如果 a_0 是方程 $B^2(a)=1$ 的最小根，则 a_0 是单根，且 $B'(a_0)<0$.

证明 根据引理 8.3，当 $a>a_0$ 时 $B(a)>1$．如果 a_0 是 $B(a)=1$ 的二重根，则引理 8.6 将意味着它是极大值点，这是不可能的．定理证明完毕．

把上述诸引理中的知识综合起来，我们得到

定理 8.1. 存在两个实数序列 $\{a_0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\}$ 与 $\{a_1^*\leqslant a_2^*\leqslant a_3^*\leqslant\cdots\}$，当 $k\to\infty$ 时 $a_k, a_k^*\to\infty$，

$$a_0<a_1^*\leqslant a_2^*<a_1\leqslant a_2<a_3^*\leqslant a_4^*<a_3\leqslant a_4<\cdots,$$

使得(8.1)有最小周期为 π(或 2π)的周期解，当且仅当对于某个 $k=0,1,2,\cdots$有 $a=a_k$(或对于某个 $k=0,1,2,\cdots$有 $a=a_k^*$)．方程(8.1)在区间

$$(a_0,a_1^*),\ (a_2^*,a_1),\ (a_2,a_3^*),\ (a_4^*,a_3),\ \cdots$$

上稳定，在区间

$$(-\infty, a_0], (a_1^*, a_2^*), (a_1, a_2), (a_3^*, a_4^*), (a_3, a_4), \cdots$$

上不稳定．方程(8.1)在 a_{2k+1} 或 a_{2k+2}(或：a_{2k+1}^* 或 a_{2k+2}^*)是稳定的，当且仅当 $a_{2k+1}=a_{2k+2}$(或 $a_{2k+1}^*=a_{2k+2}^*$)，$k\geqslant 0$．如果 a 是复数，方程(8.1)总是不稳定的．

证明 我们首先注意，如果 a 是复数，则(8.1)不稳定(引理 8.1)．引理 8.4 意味着存在两个无穷序列$\{a_k\}$、$\{a_k^*\}$．由引理 8.3 推知 $a_0\neq-\infty$．由引理 8.3 与 8.7 推知$B^2(a)=1$ 的第一个零点是 a_0，它是单根，$(-\infty, a_0]$是一个稳定区间．如果方程(8.1)在 a_1^* 稳定，则$B(a)=-1$ 将以 a_1^* 为二重根．引理 8.6 将意味着在 a_1^* 取极小值，于是引理 8.5 意味着 $a_1^*=a_2^*$．如果 $a_1^*<a_2^*$，则当 $a_1^*<a<a_2^*$ 时 $B(a)<-1$，由引理 8.2 推知(a_1^*,a_2^*)是一个不稳定区间．引理 8.5 意味着 $a_2^*<a_1$，而用归纳法进行讨论便得出定理．

附图 8.1 是函数 $B(a)$可能有的一个图象．

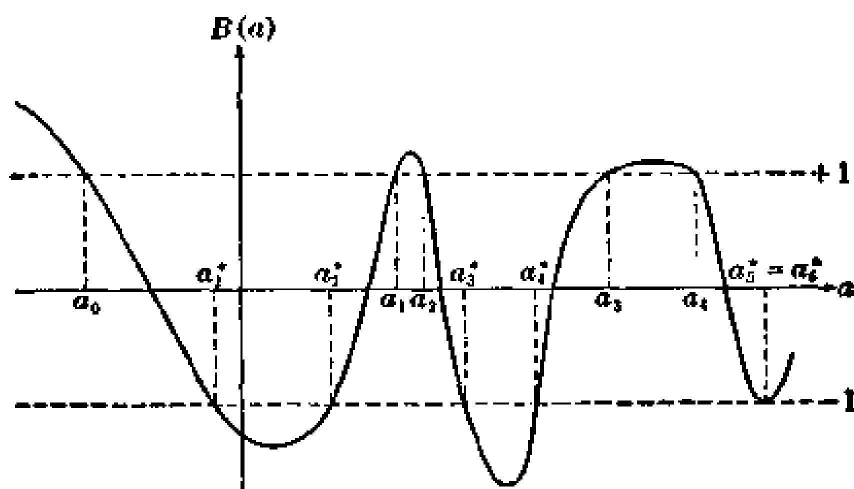


图 Ⅱ.8.1

前面对(8.1)的通解的分析已经说明了对于给定的a与ϕ很难决断(8.1)的解是否有界，另一方面，通解理论又指出了决断这个问题所必需的计算；也就是说，要确定 a 的这样一些特殊值，对于它们方程有周期为 π 或 2π 的解，还要确定对应于这些值的线

性无关解的个数.

(8.1)的一个很重要的特殊情形是 Mathieu 方程

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}+(\sigma^2+2q\cos\omega\tau)y=0, \tag{8.9}$$

这里 $\sigma\geqslant0$, q, ω 是实常数. 对于 Mathieu 方程, 为保证稳定性, 我们可对系数给出某些明确的条件. 如果令 $\omega\tau=2t$, Mathieu 方程等价于

$$\ddot{y}+\left(\left(\frac{2\sigma}{\omega}\right)^2+\frac{8q}{\omega^2}\cos2t\right)y=0. \tag{8.10}$$

它是(8.1)当 $a=(2\sigma/\omega)^2$, $\phi=(8q/\omega^2)\cos2t$ 的特殊情形. 让我们在 q 近似于 0 时研究它. 特征乘数的方程是

$$\rho^2-2B\rho+1=0,$$

这里 $B=B(\sigma,q,\omega)$ 是 σ、q、ω^{-1} 的连续函数. 当 $q=0$ 时, (8.10) 的主矩阵解是

$$X=\begin{bmatrix}\cos\frac{2\sigma}{\omega}t & \frac{\omega}{2\sigma}\sin\frac{2\sigma}{\omega}t\\ -\frac{2\sigma}{\omega}\sin\frac{2\sigma}{\omega}t & \cos\frac{2\sigma}{\omega}t\end{bmatrix}.$$

因此 $B(\sigma,0,\omega)=\cos2\pi\sigma/\omega$, 且如果 $2\sigma\neq k\omega$ [或 $a\neq k^2$], $k=0,1,2,\cdots$, 则 $B^2(\sigma,0,\omega)<1$. 于是对于任意满足 $2\sigma\neq k\omega$ 的 σ 与 ω, 存在 $q=q(\sigma,\omega)$ 使得 $B^2(\sigma,q,\omega)<1$, 而且方程(8.9) 稳定(引理 8.2). 在图 8.2 中指出了在(σ^2,q)平面内的稳定性区域.

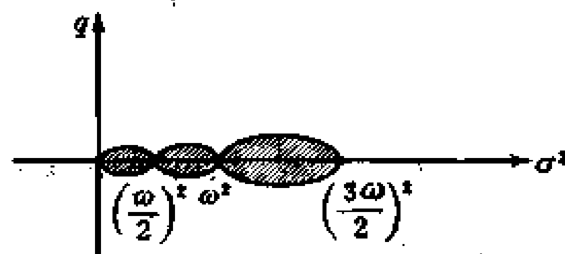


图 Ⅲ.8.2

可以用下述方式给这个稳定性结论以非常几何式的证明. 如

果 ρ_1, ρ_2 是(8.9)的特征乘数，则由于 $\rho_1\rho_2=1$，ρ_1^{-1}, ρ_2^{-1} 也是特征乘数．此外，由于 σ, q, ω 是实数，$\bar{\rho}_1$，$\bar{\rho}_2$ 也是乘数．因此，如果 $q=0$ 时 $\rho_1 \neq \rho_2$，$|\rho_1|=|\rho_2|=1$，则 q 充分小时由于乘数是 q 的连续函数也有 $|\rho_1|=|\rho_2|=1$，且 $\rho_1 \neq \rho_2$.

要决定(8.9)当 $\sigma^2=(k\omega/2)^2$（k 为整数）时是否稳定，是极为困难的．在后面有一章里将讨论可用于此问题的解析方法．对于方程(8.9)，实际上可以证明在任何点 $(0, [k\omega/2]^2)$（k 为整数）的任何邻域里，总有 (q, σ^2) 的值使得(8.9)不稳定.

在文献中有许多关于用(8.1)中的函数 $a+\phi(t)$ 来估计定理8.1中的稳定性区域的结果．我们可举出 Borg[1] 关于第一个稳定区域的定理，它是 Liapunov[1]的结果的推广.

定理 8.2. 如果对所有 t 有 $p(t+\pi)=p(t)\not\equiv 0$，$p(t)$ 连续，且

$$\pi\int_0^\pi |p(t)|\,dt \leqslant 4,$$

则方程

$$\ddot{u}+p(t)u=0 \tag{8.11}$$

的所有解在 $(-\infty, \infty)$ 上有界.

证明 只需说明(8.11)没有实的特征乘数便行了．如果(8.11)的特征乘数 ρ 是实数，则有实解 $u(t)$，它对所有 t 满足 $u(t+\pi)=\rho u(t)$．或者对所有 t 有 $u(t)\neq 0$，或者 $u(t)$ 有无穷多个零点，相连的两个零点 a、b 满足 $0\leqslant b-a\leqslant \pi$. 在前一种情况下，$u(\pi)=\rho u(0)$，$\dot{u}(\pi)=\rho\dot{u}(0)$，而且 $\dot{u}(\pi)/u(\pi)=\dot{u}(0)/u(0)$. 由于 $\ddot{u}/u+p=0$，通过分部积分得

$$\int_0^\pi \frac{\dot{u}^2(t)}{u^2(t)}dt+\int_0^\pi p(t)\,dt=0.$$

按照对 p 的假设，这是不可能的．在第二种情况下，我们可以假定在 $a<t<b$ 上 $u(t)>0$．令 $u(c)=\max\limits_{a<t<b}|u(t)|$. 由关于 p 的假设，

推知对任意 α、$\beta\in(a,b)$ 有

$$\frac{4}{\pi}\geqslant\int_0^\pi|p(t)|dt\geqslant\int_a^b\left|\frac{\ddot{u}(t)}{u(t)}\right|dt$$

$$>\frac{1}{u(c)}\int_a^b|\ddot{u}(t)|dt\geqslant\frac{1}{u(c)}|\dot{u}(\alpha)-\dot{u}(\beta)|.$$

根据中值定理，存在 α、β 使得 $\dot{u}(\alpha)=u(c)/(c-a)$，$-\dot{u}(\beta)=u(c)/(b-c)$. 由于对所有 x、y，$4xy\leqslant(x+y)^2$，因之

$$\frac{4}{\pi}>\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{b-a}{(c-a)(b-c)}\geqslant\frac{4}{b-a}\geqslant\frac{4}{\pi}.$$

这个矛盾说明特征乘数是复数，结果就证明了.

习题 8.1. 考虑

$$\ddot{u}+[a-2qS(t)]u=0. \tag{8.12}$$

这里

$$S(t)=\begin{cases}+1, & -\pi/2\leqslant t<0,\\ -1, & 0\leqslant t<\pi/2,\end{cases}$$

对所有 t 有 $S(t+\pi)=S(t)$. 证明在(a,q)平面内的点 $(a_0,0)$ ($a_0>0$，$\cos\pi\sqrt{a_0}=\pm1$) 的每个邻域里含有这样的点，对于它(8.12)有无界解. 提示：如果 $a>|2q|$，$r^2=a+2q$，$s^2=a-2q$，可以证明 $A=(\rho_1+\rho_2)/2$ 由

$$A=\frac{1}{4rs}\left[(s+r)^2\cos\frac{\pi}{2}(s+r)-(s-r)^2\cos\frac{\pi}{2}(s-r)\right]$$

给出.

Ⅲ.9. 相反系统

考虑系统

$$\dot{x}=A(t)x,\ \ A(t+T)=A(t),\ \ -\infty<t<\infty. \tag{9.1}$$

其中 $A(t)$是连续的实或复 $n\times n$ 矩阵，$T>0$ 是常数. 如果对于系统(9.1)的每个特征乘数 ρ，数 $\bar{\rho}^{-1}$ 也是特征乘数，按照 Liapunov

的叫法，(9.1)就称为相反系统．如果A是实的，特征乘数出现复共轭对，并且如果ρ是特征乘数意味着ρ^{-1}也是特征乘数，(9.1)就是相反系统．令$\mathscr{A}$记这样的Banach空间，它的元素是$-\infty<t<\infty$上的连续的实值或复值$n\times n$矩阵函数$A(t)$，$A(t+T)=A(t)$，范数$|A|=\sup\limits_{0\leq t\leq T}|A(t)|$．①

如果$\mathscr{A}$中的A是相反的，则定理7.2意味着(9.1)稳定，当且仅当(9.1)的所有特征乘数有单初等因子并且模等于1．因此，相反系统(9.1)的稳定性等于在$(-\infty,\infty)$上解的有界性．当(9.1)的所有解在$(-\infty,\infty)$上有界时，我们将说(9.1)在$(-\infty,\infty)$上稳定．$\mathscr{A}$的元素A称为在$(-\infty,\infty)$上相对于$\mathscr{A}$中集合$\mathscr{B}$强稳定，如果存在$\delta>0$，使得系统

$$\dot{x}=B(t)x \tag{9.2}$$

对于所有$\mathscr{B}$中满足$|A-B|<\delta$的B而言，在$(-\infty,\infty)$上稳定．我们令$\mathscr{B}\mathscr{A}$记$\mathscr{A}$中使(9.1)是相反的矩阵A的集合．

引理9.1．如果A在$\mathscr{B}\mathscr{A}$中，又$\rho_0=\rho_0(A)$($|\rho_0|=1$)是(9.1)的单特征乘数，则存在$\delta_0>0$，使得对于$\mathscr{B}\mathscr{A}$中每个满足$|A-B|<\delta_0$的B，系统(9.2)有单特征乘数$\rho_0(B)$，$|\rho_0(B)|=1$．

证明 假设A在$\mathscr{B}\mathscr{A}$内，而$\rho_0=\rho_0(A)$是(9.1)的单特征乘数，$|\rho_0|=1$．由公式(1.11)推知(9.1)的满足$X_A(0)=I$的矩阵解是$\mathscr{A}$内A的连续函数．特别地，(9.1)的特征乘数是$\mathscr{A}$内A的连续函数．因此，在复平面内存在半径为$\varepsilon(\varepsilon>0)$，中心在$\rho_0$的圆盘$D_\varepsilon(\rho_0)$，又存在$\delta_1>0$，使得对于$\mathscr{B}\mathscr{A}$中所有满足$|A-B|<\delta_1$的$B$，(9.2)恰有一个特征乘数$\rho_0(B)$在$D_\varepsilon(\rho_0)$内．由于(9.2)是

---

① 如果A不是连续函数，仅仅Lebesgue可积，则下面的结果当

$$|A|=\int_0^T|A(s)|ds$$

时正确．

相反系统，$\bar{\rho}^{-1}(B)$也是一个特征乘数. 但是除非 $|\rho_0(B)|=1$, 否则 $\bar{\rho}_0^{-1}(B)=\rho_0(B)/|\rho_0(B)|^2\neq\rho_0(B)$. 另一方面, $|\rho_0(A)|=1$ 的假设意味着 $\bar{\rho}_0^{-1}(A)=\rho_0(A)$, 而根据$\rho_0(A)$在 A 内的连续性, 我们可以求得 $\delta_0<\delta_1$, 使得当$\mathscr{B}\mathscr{A}$中的 B 满足 $|A-B|<\delta_0$ 时, $\bar{\rho}_0^{-1}(B)$、$\rho_0(B)$属于 $D_\varepsilon(\rho_0)$. 这意味着当 $\mathscr{B}\mathscr{A}$ 中的 B 满足 $|A-B|<\delta_0$ 时 $|\rho_0(B)|=1$, 引理证毕.

定理 9.1. 如果 A 在 $\mathscr{B}\mathscr{A}$ 中, 又(9.1)的所有特征乘数是不相同的, 并且模等于一, 则 A 是强稳定的.

证明 从引理 9.1 与周期系统解的 Floquet 表示, 直接得到本定理.

引理 9.2. 如果$\mathscr{A}$中的 A 是实的, 又存在一个 $n\times n$ 非奇异矩阵 D, 使得或者

(i) $DA(t)=-A(-t)D$,

或者

(ii) $DA(t)=-A'(t)D$, (A' 是 A 的转置),

则 A 也在 $\mathscr{B}\mathscr{A}$ 内. 在情况(i)之下, 主矩阵解 $X(t)$对所有 t 满足 $X^{-1}(-t)DX(t)=D$, 而在情况(ii)之下, 它满足 $X'(t)DX(t)=D$.

证明 令 $X(t)$ $(X(0)=I)$ 为(9.1)的矩阵解. 如果 $Y(t)$ $(Y(0)=Y_0)$是伴随方程$\dot{y}=-yA(t)$的$n\times n$矩阵解, 则对于所有 t 有 $Y(t)X(t)=Y_0$.

情况(i). 如果 $DA(t)=-A(-t)D$, 则 $Y(t)=X^{-1}(-t)D$ 满足伴随方程. 事实上, $\dot{Y}(t)=-\dot{X}^{-1}(-t)D=X^{-1}(-t)A(-t)D=-X^{-1}(-t)DA(t)=-Y(t)A(t)$. 因此, $X^{-1}(-t)DX(t)=D$, 它意味着对于所有的 t, $X(t)$与 $X(-t)$相似. 如果 $X(t)=P(t)e^{Bt}$, 则 $P(0)=I$ 且 $X(t)$相似于$X(-t)$, 这意味着 $\det(e^{BT}-\rho I)=0$ 与 $\det(e^{-BT}-\mu I)=0$的根相同. 显然, 这些根彼此互逆, 这证明了情况(i).

情况(ii)．如果 $DA(t)=-A'(t)D$，则 $Y(t)=X'(t)D$ 是伴随方程的解．事实上，$\dot{Y}=\dot{X}'D=X'A'D=-X'DA=-YA$．于是对所有 t 有 $X'(t)DX(t)=D$，而 $X'(t)$ 对所有 t 而言相似于 $X^{-1}(t)$．剩下的论证像情况(i)那样进行．

最重要的相反系统是 Hamilton 系统；即系统

$$E\dot{x}=H(t)x, \tag{9.3}$$

这里的 $H'=H$ 是实的周期为 T 的 $2k\times 2k$ 矩阵，

$$E=\begin{bmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{bmatrix},$$

而 I_k 是 $k\times k$ 单位矩阵．由于 $E^2=-I_{2k}$，$E'=E$，系统(9.3)是(9.1)当 $A=-EH$ 且 $EA=H=H'=A'E'=-A'E$ 的特殊情形．由于这是定理 9.2 的情况(ii)的特殊情形($D=E$)，所以(9.3)是相反系统．并且，(9.3)的满足 $X(0)=I$ 的矩阵解 $X(t)$ 满足

$$X'(t)EX(t)=E. \tag{9.4}$$

满足 (9.4) 的所有矩阵的集合称为实辛群．有时这种矩阵称为 E 正交矩阵．

一般的复相反系统类包括典型系统

$$J\dot{x}=H(t)x. \tag{9.5}$$

这里的 H 是周期为 T 的Hermite 矩阵（即 $H^*=H$，这里的 H^* 是 H 的共轭转置矩阵）而

$$J=i\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix},\quad i=\sqrt{-1}. \tag{9.6}$$

为了证明这个系统是相反系统，令 $X(t)(X(0)=I)$ 为(9.5)的主矩阵解．则 $A=-JH$ 是(9.5)中的系数矩阵，而且

$$\frac{d}{dt}X^*(t)JX(t)=-X^*(t)H^*(t)J^*JX(t)$$
$$-X^*(t)J^2H(t)X(t)=0,$$

故 $X^*(t)JX(t)$ 是常矩阵. 由于 $X(0)=I$, 我们得知对一切 t

$$X^*(t)JX(t)=J. \tag{9.7}$$

于是 $X(T)$ 相似于 $X^{*-1}(T)$，结论就直接出来了. 满足(9.7)的矩阵称为 J 幺正矩阵. 请注意 J 幺正矩阵是非奇异的.

由于下述理由，系统(9.5)包含系统(9.3)作为特例. 任意两个具有相同的特征值并且重数也相同的斜 Hermite 矩阵 A、B 是幺正等价的；也就是说，如果 $A^*=-A$, $B^*=-B$, 则存在矩阵 U, 使得 $U^*U=UU^*=I$, 并且 $U^*AU=B$. 如果再有 A 与 B 都是实的，则存在实幺正(正交)矩阵 U, 使得 $U'AU=B$. 由于 E 是斜 Hermite 矩阵，它的特征值 i 是 k 重的，存在一个幺正矩阵 U, 使得 $UEU^*=J$, 这里的 J 在(9.6)中给出，其中 $p=q=k$. 如果我们令 $x=U^*y$, 则(9.3)变换成(9.5)，其中 H 被代换为 UHU^*. 能达此目的一个矩阵 U 是

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_k & -iI_k \\ -iI_k & I_k \end{bmatrix}. \tag{9.8}$$

(9.5)的一个特殊情形是二阶系统

$$\ddot{u}+Q\dot{u}+P(t)u=0. \tag{9.9}$$

这里的 u 是 k 维向量，Q 是常矩阵，$Q^*=-Q$，$P^*(t)=P(t)=P(t+T)$. 事实上，系统(9.9)可以写成形式

$$K\dot{x}=H(t)x,$$

这里

$$x=\begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix} -Q & -I_k \\ I_k & 0 \end{bmatrix},\quad H(t)=\begin{bmatrix} P(t) & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}$$

存在着非奇异的 Hermite 矩阵 P，使得 $PKP^*=J$，而因此变换 $x=P^*y$ 把(9.9)化为(9.5)的特殊情形.

引理 9.2 的情况(i)表示了系数矩阵 $A(t)$ 的某种奇偶性. 为说明此点，考虑二阶矩阵系统

$$\ddot{u}+P(t)u=0. \tag{9.10}$$

这里的 $P(t+T)=P(t)$ 是 $k\times k$ 的连续实矩阵. 它等价于 $2k$ 阶系统

$$\dot{x}=A(t)x,\quad A(t)=\begin{bmatrix}0 & I_k\\ -P(t) & 0\end{bmatrix}. \tag{9.11}$$

如果 $P=(P_{jk})(j,k=1,2)$ 是这样的分块矩阵, P_{11} 是 $r\times r$ 矩阵, P_{22} 是 $s\times s$ 矩阵, $P_{jk}(t)=(-1)^{j+k}P_{jk}(-t)$. 则 (9.11) 是相反系统. 事实上, 令 $D=\mathrm{diag}(I_r,-I_s,-I_r,I_s)$, 则适合引理 9.2 的情况(i).

更加特殊的相反系统是

$$\begin{aligned}&\ddot{u}+Fu=0,\\ &F=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\cdots,\sigma_n^2),\quad \sigma_j>0.\end{aligned} \tag{9.12}$$

矩阵 F 是周期为任意的周期函数. 对于任意 $T>0$, (9.12)的特征乘数是 $\rho_{2j-1}=\bar{\rho}_{2j}$, $\rho_{2j-1}=e^{i\sigma_jT}$, $j=1,2,\cdots,n$. 这些乘数是不相同的, 当且仅当

$$2\sigma_j\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,\omega),\quad \sigma_j\pm\sigma_k\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,\omega),\ j\neq k, \tag{9.13}$$

这里的 $T=2\pi/\omega$. 因之, 如果(9.13)被满足, 由定理 9.1 推知存在 $\delta>0$, 使得: 只要 B 在 $\mathscr{B}\mathscr{A}$ 内, 且

$$|B-A|<\delta,\quad A=\begin{bmatrix}0 & I\\ -F & 0\end{bmatrix},$$

又 F 如(9.12)中所定义, 则(9.2)的所有解在 $(-\infty,\infty)$ 内有界. 特别地, 如果 $\Phi(t)=\Phi(t+T)$ 是对称的或满足上面提及的奇偶性, 又(9.13)被满足, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得系统

$$\ddot{u}+(F+\varepsilon\Phi(t))u=0 \tag{9.14}$$

的所有解对于一切满足 $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 的 ε 在 $(-\infty,\infty)$ 内有界. 请比较这个结果与在第 8 节末关于纯量二阶方程的结果.

如果(9.13) 的某些条件不满足, 就很难决定是否存在 $\varepsilon_0>0$

使得(9.14)的解对于$|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$有界．对于 Hamilton 系统，可得到某些一般的结果(见第 10 节)，但是对于另外的情形，只讨论过特殊的方程．可以用迭代法来达到判定，这将在下一章里讨论．

如果系统(9.14)是相反系统，可以用例子说明(见第 VII 章)即便满足了(9.13)，(9.11)的解对任意$\varepsilon\neq 0$可能无界．

习题 9.1．假设$B(t)$是可积的以T为周期的矩阵，使得$\dot{x}=B(t)x$的特征乘数不相同并且模等于一．如果$A(t)$是可积的以T为周期的矩阵，使得$\dot{x}=A(t)x$是相反矩阵，则存在$\delta>0$，使得由$\int_0^T|A(s)-B(s)|ds<\delta$推知方程$\dot{x}=A(t)x$的解在$(-\infty,\infty)$上稳定．提示：利用$\dot{x}=A(t)x$的基本矩阵解对$A$的连续性，这一点蕴含在公式(1.11)中．

III.10．典型系统

如同第 9 节，我们令$\mathscr{A}$为这样的 Banach 空间，它的元素是周期为T的$n\times n$复可积矩阵函数，$|A|=\int_0^T|A(t)|dt$．令$\mathscr{C}\mathscr{A}$是由形如$-JH$的矩阵所成的子空间，这里的H满足$H^*=H$，而

$$J=i\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}. \tag{10.1}$$

如果A属于$\mathscr{C}\mathscr{A}$，则与之相连的周期微分系统是典型系统

$$J\dot{x}=H(t)x,\quad H^*=H. \tag{10.2}$$

这一节的主要目的是给出使系统(10.2)相对于$\mathscr{C}\mathscr{A}$而言在$(-\infty,\infty)$上强稳定的必要充分条件．

在第 9 节中，我们已经看到典型系统(10.2)是相反的，因而，它在$(-\infty,\infty)$上稳定，当且仅当(10.2)的所有特征乘数在单位圆上并具有单初等因子，或者等价地说，单值矩阵S的所有特征值有

单初等因子且模为 1. 这后一论点等价于存在非奇异矩阵 U 使得

$$U^{-1}SU=\mathrm{diag}(e^{i\nu_1},\cdots,e^{i\nu_n}),\quad \nu_j \text{ 皆实数}.$$

在第 9 节中还指出了(10.2)的主矩阵解的单值矩阵 S 是 J 幺正的；即

$$S^*JS=J. \tag{10.3}$$

由于(10.2)的稳定性质只依赖于 S 的特征值，我们利用下列术语：一个 J 幺正矩阵 S 是稳定的，如果所有特征值的模为 1 并且有单初等因子. 一个 J 幺正矩阵 S 是强稳定的，如果存在 $\delta>0$，使得每个满足 $|R-S|<\delta$ 的 J 幺正矩阵 R 都是稳定的.

作为讨论稳定性的准备，我们引进下列术语. 对于任意 C^n 中的 x、y，定义双线性型

$$\langle x,y\rangle=i^{-1}y^*Jx.$$

对于 Hamilton 系统，表示式 $\langle x,y\rangle$ 与 Lagrange 括号有关. 事实上，如果 U 由(9.8)给出，又 $x=U^*u$, $y^*=v^*U$, 则 $\langle u,v\rangle=i^{-1}v^*Eu$. 对于实向量 v、u 而言，v^*Eu 是 Lagrange 括号.

由于 $i^{-1}J$ 是 Hermite 矩阵，显然 $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$，又 $\langle x,x\rangle$ 是实数. x 的 J 范数是 $\langle x,x\rangle$. C^n 的子空间 V 称为非负的，如果对所有 V 中的 x 有 $\langle x,x\rangle\geqslant 0$，而如果对于所有 V 中的 $x\neq 0$ 而言 $\langle x,x\rangle$ 是正数则称它为正的. 两个向量 x、y 称为 J 正交的，如果 $\langle x,y\rangle=0$. 如果对所有 y 有 $\langle x,y\rangle=0$，则 $Jx=0$，而这意味着 $x=0$. 由这又直接推出：S 是 J 幺正的，当且仅当对所有 x、y 有 $\langle Sx,Sy\rangle=\langle x,y\rangle$. 从 J 的定义直接得知向量 $e^1=(1,0,\cdots,0)$, $e^2=(0,1,\cdots,0)$, $\cdots$, $e^n=(0,0,\cdots,1)$ 满足

$$\begin{aligned}&\langle e^j,e^k\rangle=0, && j\neq k,\\ &\langle e^j,e^j\rangle=1, && 1\leqslant j\leqslant p,\\ &\langle e^j,e^j\rangle=-1, && p<j\leqslant n.\end{aligned} \tag{10.4}$$

引理 10.1. 与稳定的 J 幺正矩阵的不同的特征值相对应的

特征向量彼此 J 正交. 一个稳定的 J 幺正矩阵的特征向量张成空间 C^n.

证明 如果 x、y 分别是与 λ、μ 相应的特征向量，$\lambda=\mu$ 且 $|\lambda|=1$，则 $\langle x,y\rangle=\langle Sx,Sy\rangle=\lambda\bar{\mu}\langle x,y\rangle$. 如果 $\lambda\bar{\mu}\neq1$，则 $\langle x,y\rangle=0$. 由于假定矩阵稳定，由 $\bar{\mu}^{-1}=\mu$ 与 $\lambda\neq\mu$ 推出 $\lambda\bar{\mu}=\lambda/\mu\neq1$. 这证明了 $\langle x,y\rangle=0$. 证明稳定的 J 幺正矩阵的特征向量张成空间 C^n，与线性代数中对于幺正矩阵证明对应的结果用恰好相同的方法.

引理 10.2. 稳定 J 幺正矩阵的非负特征空间是正的，非正特征空间是负的.

证明 假设 V 是非负的特征空间. 如果 x 在 V 内且 $\langle x,x\rangle=0$，则对于任意 $y\in V$ 与任意复数 λ，

$$0\leqslant\langle y+\lambda x,y+\lambda x\rangle=\langle y,y\rangle+2Re\lambda\langle x,y\rangle.$$

如果 $\langle x,y\rangle\neq0$，我们可以取 λ 使得右边这个表示式成为负数. 因此对于所有 V 中的 y 有 $\langle x,y\rangle=0$. 由这个事实与引理 10.1 推知对所有 y 有 $\langle x,y\rangle=0$. 于是 $x=0$. 当 V 是非正的特征空间时，可以相似地论证，从而证明了引理.

定理 10.1. 矩阵 S 是稳定 J 幺正矩阵，当且仅当存在 J 幺正矩阵 U 使得

$$U^{-1}SU=\mathrm{diag}(e^{i\nu_1},\cdots,e^{i\nu_n}). \tag{10.5}$$

这里的每个 ν_j 是实数.

证明 令 $G=\mathrm{diag}(e^{i\nu_1},\cdots,e^{i\nu_n})$. 如果 $S=UGU^{-1}$ 且 U 是 J 幺正矩阵，显然 S 也是稳定的；并且也是 J 幺正矩阵.

反过来，假设 S 是稳定的 J 幺正矩阵，而 $\lambda=e^{i\nu}$ 是 r 重的特征值. 对于特征空间 V_λ，可以选取一组 J 幺正基 $v^1,\cdots,v^r$，使得

$$\langle v^j,v^k\rangle=\begin{cases}0, & j\neq k,\\ \pm1, & j=k.\end{cases}\qquad j,k=1,2,\cdots,r.$$

因为如果不可这样，将存在特征向量 v 使得 v 与 V_λ J 正交. 根据引

理 10.1，这是不可能的，因为它将意味着 v 与整个空间 $C^n J$ 正交。某些 v^j 可使 $\langle v^j, v^j\rangle = +1$，而另一些 v^j 可使 $\langle v^j, v^j\rangle = -1$。根据引理 10.1，我们可以对全空间选取一组由特征向量构成的 J 标准正交基 $u^1, \cdots, u^n$，并且把它们按这种方式来编序：$j \neq k$ 时，$\langle u^j, u^k\rangle = 0$，$j \leqslant p'$ 时 $\langle u^j, u^j\rangle = 1$，$p' < j \leqslant n$ 时 $\langle u^j, u^j\rangle = -1$。但是，Hermite型的惯性律与(10.4)意味着 $p' = p$。如果 $U = (u^1, \cdots, u^n)$，则(10.5)被满足。并且，对于(10.4)中的诸向量 e^j 而言，$\langle Ue^j, Ue^k\rangle = \langle u^j, u^k\rangle = \langle e^j, e^k\rangle$ 对所有 j、k 成立。于是，对于所有 x、y 有 $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$，而且 U 是 J 幺正矩阵。这就证明了定理。

在上述定理的证明中指出了，对于任何稳定的 J 幺正矩阵，可以求得完全的一组 J 标准正交特征向量 u^j 与相应的特征值 $\lambda_j = e^{i\nu_j}$。如果 $\langle u^j, u^j\rangle = 1$(或 -1)，我们将说特征值 λ_j 是正类型的(或负类型的)。在俄文文献中，所用的术语是第一类的(或第二类的)。有 p 个正类型的特征值与 $n-p$ 个负类型的特征值。下述定理断言，稳定的 J 幺正矩阵是强稳定的，当且仅当每个重特征值不是正与负两种类型的。

定理 10.2. 稳定的 J 幺正矩阵是强稳定的，当且仅当每个特征空间是定的(即，或者正或者负)。

证明. 假设 S 是一个稳定的 J 幺正矩阵，并且有一个特征值 $\lambda(|\lambda| = 1)$，它的特征空间不是定的。引理 10.2 意味着存在特征向量 v^1、v^2，使得 $\langle v^1, v^2\rangle = 0$，$\langle v^1, v^1\rangle = 1$，$\langle v^2, v^2\rangle = -1$。选取 J 正交于 v^1、v^2 的 $v^3, \cdots, v^n$，使得 $v^1, \cdots, v^n$ 形成 C^n 的一组基。对于任意 $\alpha \geqslant 0$，定义如下线性变换 $R: C^n \to C^n$:

$$Rv^1 = S[(\cosh\alpha)v^1 + (\sinh\alpha)v^2],$$

$$Rv^2 = S[(\sinh\alpha)v^1 + (\cosh\alpha)v^2],$$

$$Rv^k = Sv^k, \quad k = 3, \cdots, n.$$

容易验证，对于所有 j, k 有 $\langle Rv^j, Rv^k\rangle = \langle v^j, v^k\rangle$，于是与变换 R 相

关连的矩阵是 J 幺正的．并且，v^1+v^2 是 R 的与特征值 λe^{α} 相关连的特征向量，而 R 对于任意 $\alpha>0$ 有模大于一的特征值．于是，R 在 $(-\infty,\infty)$ 上不是稳定的．由于当 $\alpha\to 0$ 时 R 趋于 S，这意味着 S 不是强稳定的．

反过来，假设 S 是一个稳定的 J 幺正矩阵，其特征空间都是定的．设 $\lambda_k(k=1,2,\cdots,r)$ 为 S 的不同的特征值，是 n_k 重的，而 n_k 维的空间 V_k 是相应的特征空间．则

$$C^n=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_r.$$

我们又令 P_k 记由 C^n 到 V_k 的射影算子；即对任意 C^n 中的 x，P_kx 在 V_k 中，而如果 x 在 V_k 中，$P_kx=x$．这些射影算子满足：$j\neq k$ 时 $P_kP_j=0$，$P_k^2=P_k$，而且可以用公式

$$P_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}(\zeta I-S)^{-1}d\zeta \tag{10.6}$$

来定义，这里的 γ_k 是这样的圆的正向圆周，圆心在 λ_k，半径甚小，以致圆内不包含 S 的其他特征值．如果 R 是任何使得 $|R-S|$ 充分小的 $n\times n$ 矩阵，则每个圆周 γ_k 恰好包围 R 的 n_k 个特征值（计算它们的重数）．因此，积分

$$Q_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}(\zeta I-R)^{-1}d\zeta$$

定义了由 C^n 到 n_k 维子空间 W_k 的射影算子 Q_k，使得 W_k 是在 R 下的不变量，并且 $C^n=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_r$．子空间 W_k 是与 R 的被包围在 γ_k 内的特征值相关连的 R 的广义特征空间的代数和．此外，这个公式还说明 Q 是 R 的连续函数，并且当 $R\to S$ 时 $|Q_k-P_k|\to 0$．

我们下一个目标是说明 $\langle x,x\rangle$ 在每个 W_k 上是定的．对于 W_k 中的 x，

$$\langle x,x\rangle=\langle Q_kx,Q_kx\rangle$$

$$=\langle P_kx, P_kx\rangle+\langle (Q_k-P_k)x, (Q_k-P_k)x\rangle$$
$$+2Re\langle P_kx, (Q_k-P_k)x\rangle.$$

根据$\langle x, y\rangle$的定义，对于所有 C^n 中的 x、y，我们有$|\langle x, y\rangle|\leqslant|J|\cdot|x|\cdot|y|$. 此外，由于 S 在特征空间上是定的，存在 $\alpha>0$ 使得对于所有 $x\in V_k$ 与每个 $k=1,2,\cdots,r$，$|\langle x, x\rangle|\geqslant\alpha|x|^2$. 因此，对于 W_k 中的 x，

$$|\langle x, x\rangle|\geqslant\alpha|P_kx|^2-|J|\cdot|Q_k-P_k|^2\cdot|x|^2-2|J|\cdot|P_k|\cdot|Q_k-P_k|^2\cdot|x|^2$$
$$\geqslant[\alpha(1-|Q_k-P_k|)^2-|J|\cdot|Q_k-P_k|^2-2|J|\cdot|P_k|\cdot|Q_k-P_k|]|x|^2.$$

因之，如果$|S-R|$足够小，由射影算子在 R 内的连续性推知

$$|\langle x, x\rangle|\geqslant\frac{1}{2}\alpha|x|^2,\quad x\in W_k,\ k=1,2,\cdots,r.$$

由于每个 W_k 在 R 下不变，对于任意整数 m，可以推知，只要 R 是 J 幺正的，对于所有 W_k 中的 $x(k=1,2,\cdots,r)$有

$$|R^mx|^2\leqslant2\alpha^{-1}|\langle R^mx, R^mx\rangle|=2\alpha^{-1}|\langle x, x\rangle|\leqslant2\alpha^{-1}|J|\cdot|x|^2.$$

对于任意 $x\in C^n$，我们有 $x=Q_1x+\cdots+Q_rx$，于是

$$|R^mx|^2\leqslant2\alpha^{-1}|J|[|Q|+\cdots+|Q_r|]^2|x|^2.$$

容易看出，这意味着所有特征值必有单初等因子，并且模等于一。于是 R 稳定，它本身又意味着 S 是强稳定的. 这就证明了定理.

定理 10.3. 系统(10.2)在$(-\infty, \infty)$上强稳定，当且仅当其单值矩阵是强稳定的.

证明 在本节开始处已说明过，(10.2)在$(-\infty,\infty)$上稳定，当且仅当其单值矩阵是稳定的.由于(10.2)的解连续依赖于$\mathscr{A}$中的A，则如果单值矩阵是强稳定的，(10.2)在$(-\infty,\infty)$就是强稳定的.

现在假设(10.2)的解 $X(t)(X(0)=I)$的单值矩阵稳定，但不是强稳定的. 在定理 10.2 的证明中，已经指出，S 的任何邻域包

含有一个特征值的模>1的J幺正矩阵R. 由于$S^{-1}R$是非奇异的，引理7.1意味着有矩阵F使得$S^{-1}R=e^F$. 当$|R-S|$充分小的时候，可以从e^F的幂级数表达式或者从隐函数定理直接指明，F可以选为R的连续函数，它当$R=S$时等于零. 并且，由$S^{-1}R$是J幺正矩阵推知$e^{-F}=J^{-1}e^{F^*}J=e^{J^{-1}F^*J}$，而我们可以取$F$使得$-F=J^{-1}F^*J$. 因此，$F$可以写成$F=TJ^{-1}G$，这里的$G$是Hermite矩阵而$T$是周期.

如果我们定义$Y(t)=X(t)e^{tJ^{-1}G}$，则$Y(0)=I$，$Y(T)=R$，而且$Y(t)$是典型系统

$$J\dot{x}=L(t)x$$

的基本矩阵解，其中$L=H+X^{*-1}GX^{-1}$. 然而，$L(t)$可能不是周期为T的周期矩阵. 另一方面，我们可以用对称的扰动$L_1(t)$来修改$L(t)$，使得$L(t)+L_1(t)$是周期为T的周期矩阵，对于任何预先指定的δ有$\int_0^T|L_1(t)|dt<\delta$. 如果我们令$Y_1(t)(Y_1(0)=I)$为用$L+L_1$代替$L$后的基本矩阵解，则公式(1.11)意味着存在常数$K$，使得

$$|Y_1(T)-Y(T)|\leqslant\delta K.$$

因此，对于充分小的δ，$Y_1(T)$将有一个特征值的模>1，而(10.2)就不是强稳定的. 这就证明了定理.

如果在表示式(10.5)中S的特征值是这样来排次序的，前p个是正类型的，而余下的$n-p$个是负类型的，则定理10.2表明，一个稳定的J幺正矩阵S是强稳定的，当且仅当

$$\nu_j\not\equiv\nu_k(\mathrm{mod}\,2\pi),\qquad 1\leqslant j\leqslant p<k\leqslant n. \tag{10.7}$$

如果S是稳定典型系统(10.2)的单值矩阵，而且S的特征值记作$e^{i\theta_jT}$，$j=1,2,\cdots,n$，并且按与上面相同的方式来编序，则由定理10.3推知，典型系统在$(-\infty,\infty)$上是强稳定的，当且仅当

$$\theta_j \neq \theta_k (\mathrm{mod}\, 2\pi/T), \quad i \leqslant j \leqslant p < k \leqslant n. \qquad (10.8)$$

习题 10.1. 证明对于系统(9.12)，不等式(10.8)等价于不等式

$$\sigma_j + \sigma_k \neq 0 (\mathrm{mod}\, \omega), \quad j,k = 1,2,\cdots,n, \qquad (10.9)$$

于是，(9.12)是强稳定的，当且仅当(10.9)被满足．把这些不等式与(9.13)加以比较．

定理10.3回答了有关典型系统的稳定性的定性特征的许多问题．它很明确地说明了特征乘数的临界位置的这种特性：总可以找到任意靠近于原系统的典型系统，但却是不稳定的．留下来的一个基本问题便是确定一种求得乘数的这些临界位置的有效方法．在第Ⅷ章中对于包含小参数的方程叙述了一种这样的方法．

Ⅲ.11. 对进一步学习的说明与建议

愿意更多地了解被扰动线性系统的稳定性方面的结果的读者，可以参考 Bellman[1]，Cesari[1]，Coppel[1].

在常系数或周期系数的线性系统中，稳定性质完全由方程的特征指数所确定．并且，如果所有特征指数的实部是负数，则线性系统是一致渐近稳定的．因此，如果对线性系统附加上由关系式(2.9)给出的扰动，一致渐近稳定性保持不变．如果(1.3)中矩阵$A(t)$的元素有界，则(1.3)的每个解以一个指数函数为界．因此，对于(1.3)的每个解x，可以伴随以一个数$\lambda=\lambda_x$，其定义为

$$\lambda = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log |x(t)|.$$

Liapunov[1]把这个数λ叫作解x的特征数．若$\lambda<0$，则当$t\to\infty$时$|x(t)|\to 0$．如果(1.3)所有解的$\lambda_x<0$，则它们都按指数地趋于零．另一方面，Perron 所举出的$A(t)$如(2.14)所示的这个例子却有这样的性质，与上面对周期系统所作的说明大不相同：满足(2.9)

的扰动可能引出无界的解. 关于 Liapunov 特征数及其在稳定性理论中的应用，有着深广的理论(请见 Cesari[1], Malkin[1], Nemitskii 与 Stepanov[1], Lillo[1]).

在定理 6.1 中讨论鞍点性质的保存时，我们只注意了稳定与不稳定流形上的轨道. 自然，可以考虑下述问题: 假设 $x=0$ 是(4.1)的鞍点，而 $f: R^n \to R^n$ 有连续的一阶微商，使得 $f(0)=0$, $\partial f(0)/\partial x=0$. 是否存在 $x=0$ 的一个邻域 V，使得对于上述的任何一个 f，有变换 h 在邻域 V 内把(4.1)的轨线映到被扰动方程(6.3)的轨线? 这个问题有长久而有趣的历史. Poincaré[1]与 Liapunov[1]对于解析情形, Sternberg[1], Chen[1]对于 h 可能有有限阶导数的情形, Hartman[1]对于一般的情形，都有研究，读者可以参考.

在上一节提出的临界点局部邻域的问题可以提得更一般些. 事实上，如果对于两个 n 维微分方程

$$\dot{x}=f(x), \tag{11.1}$$

$$\dot{y}=g(y), \tag{11.2}$$

在区域 G 内有一个同胚 h，它把(11.1)的轨线映到(11.2)的轨线，就可以说这两个方程在 G 内等价. 假设向量场 f, g 属于某个拓扑空间 $\mathscr{B}$. 如果 f 在 $\mathscr{B}$ 内有一个邻域 $N(f)$，使得对于 $N(f)$ 内的每个 g, (11.1)与(11.2)等价，就说系统(11.1)是结构稳定的. 目前，研究结构稳定性与微分方程的等价系统是微分方程中最激励人的一个题目. 所有的概念对于任意的 n 维流形上的向量场同样有意义. 读者可以参考 Peixoto 关于二维系统的基本文献[1]与 Smale 关于一般问题的文章[1].

第 8 节中对于 Hill 方程稳定性的提法紧密依赖于 Magnus 与 Winkler 的书[1], 但是一点也没有指出对此方程可用的大量结果. 对于给定的函数 $\phi(t)$，精确地定出稳定与不稳定的 a 区间,

是极重要的. 每个 $\phi(t)$ 定义了一类依赖于 a 的函数，而定理 8.1 中的特殊 a_j 与 a_j^* 则产生周期为 π 或 2π 的函数. 讨论如何把任意函数按这些特殊的周期函数像 Fourier 级数那样展开，是很重要的. 从 Arscott[1], Cesari[1], Magnus 与 Winkler[1], McLachlan[1]可看到较完全的讨论与很多参考资料.

第 10 节的介绍是照 Howe 的论文[1]作出的，只应当作 Hamilton 系统与典型系统稳定性理论的引论. 强稳定系统类的拓扑特征和给定方程的稳定与不稳定区域，都有人讨论过. 对于含有小参数的方程，还设计了计算方案，读者可以参考 Gelfand 与 Lidskii[1], Yakubovich[1, 2], Krein[1], Diliberto[2], Coppel 与 Howe[1]中的结果以及进一步的文献.

第 IV 章　非临界线性系统的扰动

引进下述定义，可以方便些.

定义 1. 假设 $A(t)$是$(-\infty,\infty)$上的 $n\times n$ 连续矩阵函数，而$\mathscr{D}$是给定的函数类，其中包含零函数．如果齐次系统

$$\dot{x}=A(t)x \tag{1}$$

仅有的属于$\mathscr{D}$的解是 $x=0$，(1)就叫作对于$\mathscr{D}$是非临界的．否则，系统(1)叫作对于$\mathscr{D}$是临界的.

下面，$\mathscr{B}(-\infty,\infty)=\{f:(-\infty,\infty)\to C^n,\ f$ 连续而且有界$\}$，对于 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$ 中的任意 f，$|f|=\sup\limits_{-\infty<t<\infty}|f(t)|$．用 $\mathscr{AP}$ 记 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$的子集，它的元素是殆周期函数(其定义请见附录)，对于 $\mathscr{AP}$ 中任意的 f，用 $m[f]$记 f 的加法群．如果 f,g 都在 $\mathscr{AP}$ 中，则用 $m[f,g]$记包含 $m[f]\cup m[g]$的最小加法群．用 $\mathscr{P}_T$ 记 $\mathscr{AP}$ 的子集，它的元素是周期为T的周期函数．空间 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$，$\mathscr{AP}$ 与 $\mathscr{P}_T$ 在上面定义的$|\cdot|$之下都是 Banach 空间．如果$(-\infty,\infty)$上定义的矩阵函数的每列属于这些空间之一，就说此矩阵函数属于该空间.

本章集中研究

$$\dot{x}=A(t)x+f(t,x) \tag{2}$$

的属于 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$，$\mathscr{AP}$ 或 $\mathscr{P}_T$ 三类之一的解的存在性与稳定性等性质，这里矩阵 A 属于 $\mathscr{P}_T$，系统(1)对于所讨论的类是非临界的，而 f 在后面要加以确切化的意义下是“小”的.

我们按下述方式来进行介绍．首先详细地研究非齐次线性系统．说明系统(1)对于 $\mathscr{D}$(它是 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$，$\mathscr{AP}$ 或 $\mathscr{P}_T$ 三类之一)是非临界的，意味着非齐次线性方程在 $\mathscr{D}$ 内有唯一解，此解线

性地而且连续地依赖于 $\mathscr{D}$ 内的强迫函数. 由于(2)中的"f"小,从压缩原理产生了 (2) 的解的存在性. 把第Ⅲ章第6节的鞍点性质推广到非自治方程,便得到(2)的解的稳定性质. 在第4节里列举所得结果的某些推广, 而在第5节里说明有大强迫力与大阻尼的 Duffing 方程的某些初等性质. 在第1节的末尾, 还有一个关于 A 不在 $\mathscr{P}_T$ 中这种情形的稳定性结论.

引理 1. (*a*) A 在$\mathscr{P}_T$ 内的系统(1)对于$\mathscr{B}(-\infty,\infty)$[或$\mathscr{A}\mathscr{P}$]是非临界的,当且仅当(1)的特征指数实部不是零.

(*b*) A 在$\mathscr{P}_T$ 内的系统 (1) 对于 $\mathscr{P}_T$ 是非临界的, 当且仅当 $I-X(T)$ 是非奇异矩阵, 这里的 $X(t)(X(0)=I)$ 是(1)的基本矩阵解.

证明 (*a*) 如果假定(1)的特征指数的实部不是零,则由解的 Floquet 表示推知(1)仅有的在 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$内的解是 $x=0$, 而且对于 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$是非临界的, 因此对于 $\mathscr{A}\mathscr{P}$ 也是非临界的. 反过来, 如果(1)在$\mathscr{B}(-\infty,\infty)$内没有解 $x\neq0$,则由 Floquet 表示推知(1)不可能有特征指数 $\lambda=i\theta$, 否则方程(1)将有非零解 $e^{i\theta t}p(t)$ $(p(t+T)=p(t))$.

(*b*) 在 $X(t)$如引理中所定义的情况下, (1)的通解是 $X(t)x_0$, 这里的 x_0 是任意的常向量. 系统(1)有周期为 T 的非零周期解, 当且仅当存在 $x_0\neq0$, 使得$[X(t+T)-X(t)]x_0=0$ 对所有 t 成立. 由于假定了 A 属于 $\mathscr{P}_T$, 这就等价于存在 $x_0\neq0$ 使得$[X(T)-I]x_0=0$; 即 $X(T)-I$ 是奇异矩阵. 这就证明了引理.

附注 1. 假设方程 (1) 中的 A 是常矩阵, 则(1) 对于$\mathscr{B}$ $(-\infty,\infty)$ 或 $\mathscr{A}\mathscr{P}$ 是非临界的, 当且仅当 A 的所有特征值的实部不是零. 方程(1)对于$\mathscr{P}_T$ 是非临界的, 当且仅当 A 的所有特征值 λ 满足 $\lambda T\neq0(\mathrm{mod}\ 2\pi i)$; 或等价地说, A 的纯虚数特征值 $i\omega$ 满足 $\omega\neq0(\mathrm{mod}\ 2\pi/T)$.

IV. 1. 非齐次线性系统

讨论任何涉及到被扰动的线性系统的问题，其基础是完整地了解非齐次线性系统.

$$\dot{x}=A(t)x+f(t), \tag{1.1}$$

这里 f 是某特定类中的给定函数.

让我们回忆, (1)的伴随方程是 $\dot{y}=-yA(t)$, 如果 $X(t)$ 是(1)的基本矩阵解, 则 $X^{-1}(t)$ 是 $\dot{y}=-yA(t)$ 的基本矩阵解. 由于 A 属于 $\mathscr{P}_T$, 因之, 伴随方程有 y' 在 $\mathscr{P}_T$ 内(y' 是 y 的转置)的非平凡解, 当且仅当 $y(0)[X^{-1}(T)-I]=0$; 即当且仅当 $X^{-1}(T)-I$ 是奇异矩阵. 方程(1)在 $\mathscr{P}_T$ 内有解 x, 当且仅当 $[X(T)-I]x_0=0$. 由于矩阵 $X^{-1}(T)-I$ 与 $X(T)-I$ 除开乘上一个非奇异矩阵外是相同的, 因此使得 $y_0[X^{-1}(T)-I]=0$ 的 y_0 集合与使得 $[X(T)-I]x_0=0$ 的 x_0 集合有相同的维数. 因此, 伴随方程与(1)总是有相同个数线性无关的周期为 T 的周期解.

引理 1.1. (Fredholm 更替引理). 如果 A 在 $\mathscr{P}_T$ 内, 而 f 是 $\mathscr{P}_T$ 的给定元素, 则方程(1.1)在 $\mathscr{P}_T$ 内有解, 当且仅当

$$\int_0^T y(t)f(t)dt=0 \tag{1.2}$$

对于伴随方程

$$\dot{y}=-yA(t) \tag{1.3}$$

的所有使 y' 在 $\mathscr{P}_T$ 内的解 y 成立. 如果满足(1.2), 则系统(1.1)在 $\mathscr{P}_T$ 内有含 r 个参数的解族, 这里的 r 是(1)在 $\mathscr{P}_T$ 内的线性无关解的个数.

证明 由于 A 与 f 属于 $\mathscr{P}_T$, $x(t)$ 是(1.1)在 $\mathscr{P}_T$ 内的解, 当且仅当 $x(0)=x(T)$. 如果 $X(t,\tau)$ ($X(\tau,\tau)=I$) 是(1)的矩阵解, 而 $x(0)=x_0$, 则

$$x(t)=X(t,0)x_0+\int_0^t X(t,s)f(s)ds.$$

由于对所有 t, τ, s, 有 $X(t,\tau)X(\tau,s)=X(t,s)$, 条件 $x(T)=x_0$ 等价于

$$[X^{-1}(T,0)-I]x_0=\int_0^T X^{-1}(s,0)f(s)ds. \qquad (1.4)$$

如果 $B=X^{-1}(T,0)-I$, $b=\int_0^T X^{-1}(s,0)f(s)ds$, 则(1.4)等价于 $Bx_0=b$. 根据初等线性代数，这个矩阵方程有解，当且仅当对于使得 $aB=0$ 的所有行向量 a 有 $ab=0$. 由于 $X^{-1}(t,0)$ 是(1.3)' 的主矩阵，因而使得 $aB=0$ 的向量 a 的集合等同于 (1.3) 的周期为 T 的解 y 的初始值集合；即，解 $y(t)=aX^{-1}(t,0)$ 是(1.3)的周期为 T 的解，当且仅当 $aB=0$. 利用 b 的定义，我们便得到引理的第一部分. 如果(1.2)被满足，又 $\phi(t)$ 是(1.1)在 $\mathscr{P}_T$ 内的解，则在 $\mathscr{P}_T$ 内的任意另外的解必是 $x=z+\phi$, 这里 z 是(1)在 $\mathscr{P}_T$ 内的解. 这就证明了引理.

习题 1.1. 当 A 在 $\mathscr{P}_T$ 内且 f 在 $\mathscr{A}\mathscr{P}$ 内时，相似于引理 1.1 的是什么？

例 1.1. 考虑二阶纯量方程

$$\ddot{u}+u=\cos\omega t, \quad \omega>0. \qquad (1.5)$$

若 $x_1=u$, 等价系统是

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=-x_1+\cos\omega t, \quad \omega>0.\end{aligned} \qquad (1.5)'$$

它的伴随方程是 $\dot{y}_1=y_2$, $\dot{y}_2=-y_1$, 有通解 $y_1=a\cos t+b\sin t$, $y_2=-a\sin t+b\cos t$, 其中 a, b 是任意常数. 如果 $\omega\neq 1$, 伴随方程没有周期 $T=2\pi/\omega$ 的非平凡解. 于是，条件(1.2)被满足. 由于齐次方程没有非平凡的周期解，方程(1.5)有唯一的以 $2\pi/\omega$ 为周期的周期解. 如果 $\omega=1$, 则伴随方程每个解有周期 2π. 另一方面，由于

$$\int_0^{2\pi} y(t)f(t)dt=\int_0^{2\pi}(-a\sin t\cos t+b\cos^2 t)dt=\pi b,$$

除非 $b=0$, 它不是零，因之关系式 (1.2) 不满足. 因此，方程

(1.5)没有周期为 2π 的解，并且由于通解是 $u=a\sin t+b\cos t+(t\sin t)/2$，所有解实际上是无界的.

例 1.2. 考虑系统(1.1)，其中

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad f(t)=\frac{1}{2}\sin t\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

容易证明

$$e^{At}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+\cos t-\sin t & 2\sin t & -1+\cos t+\sin t\\ 1-\cos t-\sin t & 2\cos t & -1+\cos t-\sin t\\ -1+\cos t-\sin t & 2\sin t & 1+\cos t+\sin t\end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

由于 e^{-At} 的行是伴随方程的解，得知伴随方程的所有解的周期与强迫函数 f 的周期相同，都是 2π，并且这些解是 e^{-At} 的行的线性组合. 为了检验正交性条件(1.2)，我们需要验证 $\int_0^{2\pi}e^{-At}f(t)dt=0$. 容易求出 $e^{-At}f(t)=z\sin t$, $z=(-1,-1,1)$，正交性条件得以满足. 因此，有(1.6)中给出的 A 与 f 的系统(1.1)有周期为 2π 的周期解，事实上，它的每个解有周期 2π.

习题 1.2. 在例 1.2 中，有没有唯一的周期是 2π 的解，它在 $[0,2\pi]$ 上正交于齐次方程的以 2π 为周期的所有解——或正交于伴随方程的以 2π 为周期的所有解？怎样求出一个这样的解？

习题 1.3. 如果关系(1.2)不被满足，而 A, f 在 $\mathscr{P}_T$ 内，证明(1.1)的每个解是无界的.

定理 1.1. 假设 A 在 $\mathscr{P}_T$ 内，而 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$, $\mathscr{AP}$ 或 $\mathscr{P}_T$ 三类之一. 对于每个 $\mathscr{D}$ 内的 f，非齐次方程(1.1)在 $\mathscr{D}$ 内有一个解 $\mathscr{K}f$，当且仅当系统(1)对于 $\mathscr{D}$ 是非临界的. 并且，如果系统(1)对于 $\mathscr{D}$ 是非临界的，则 $\mathscr{K}f$ 是(1.1)在 $\mathscr{D}$ 内的仅有的解，而且对 f 是线性的与连续的；也就是说，对于所有 C 中的 a, b 与 $\mathscr{D}$ 中的 f, g, $\mathscr{K}(af+bg)=a\mathscr{K}f+b\mathscr{K}g$，又存在常数 K 使得对所

有 $\mathscr{D}$ 中的 f

$$|\mathscr{K}f|\leqslant K|f|. \tag{1.8}$$

最后，如果 $\mathscr{D}=\mathscr{A}\mathscr{P}$，则 $m[\mathscr{K}f]\subset m[f,A]$.

证明 情况 1. $\mathscr{D}=\mathscr{P}_T$. 如果 f 属于 $\mathscr{P}_T$，则由引理 1.1 推知，方程(1.1)在 $\mathscr{P}_T$ 内有唯一解，当且仅当 f 在(1.2)这种意义下与(1.3)的所有周期为 T 的解正交. 但是 $\dot{x}=A(t)x$ 与 $\dot{y}=-yA(t)$ 的线性无关的周期为 T 的解的个数相同. 因此，对于每个 $f\in\mathscr{P}_T$，方程(1.1)在 $\mathscr{P}_T$ 内有解，当且仅当方程(1)在 $\mathscr{P}_T$ 内没有非平凡解；也就是说，(1)对 $\mathscr{P}_T$ 是非临界的. 如果系统(1)对于 $\mathscr{P}_T$ 是非临界的，则引理 1.1 意味着对于每个 $f\in\mathscr{P}_T$，系统(1.1)在 $\mathscr{P}_T$ 内有唯一解 $\mathscr{K}f$. 根据唯一性，$\mathscr{K}$ 显然是由 $\mathscr{P}_T$ 入 $\mathscr{P}_T$ 的线性映射.

如果 $X(t,\tau)(X(\tau,\tau)=I)$ 是(1)的主矩阵解，则函数 $\mathscr{K}f$ 可以写为显式

$$(\mathscr{K}f)(t)=\int_0^T[X^{-1}(T,0)-I]^{-1}X(t,t+s)f(t+s)ds. \tag{1.9}$$

这个表示式中的核函数称为 (1.1) 的边界值问题 $x(0)=x(T)$ 的 Green 函数. 推得(1.9)的显式计算进行如下.

如果我们令 $(\mathscr{K}f)(0)=x_0$，则从(1.4)得

$$x_0=[X^{-1}(T,0)-I]^{-1}\int_0^T X^{-1}(s,0)f(s)ds,$$

和

$$(\mathscr{K}f)(t)=X(t,0)x_0+\int_0^t X(t,s)f(s)ds.$$

由于 $(\mathscr{K}f)(t+T)=(\mathscr{K}f)(t)$, $X(t+T,t)=X(T,0)$ 与 $X(t+T,s)=X(T,0)X(t,s)$，我们有

$$[I-X(t,0)]X(t,0)x_0=-[I-X(T,0)]\int_0^t X(t,s)f(s)ds$$
$$+X(T,0)\int_t^{t+T}X(t,s)f(s)ds.$$

乘以 $[I-X(T,0)]^{-1}$，再代入 $(\mathscr{K}f)(t)$ 的公式，便得到(1.9).

显然，公式(1.9)意味着存在常数K使(1.8)满足．事实上，K可以取得使

$$T^{-1}K=\sup_{0\leqslant s,t\leqslant T}|[X^{-1}(T,0)-I]^{-1}X(t,t+s)|.$$

这就证明了情况 1.

情况 2. $\mathscr{D}=\mathscr{B}(-\infty,\infty)$．令$X(t)$为(1)的基本矩阵解．由 Floquet 表示推知$X(t)=P(t)e^{Bt}$，其中$P(t+T)=P(t)$，而B是常矩阵．其次，把变换$x=P(t)y$用到(1.1)，得

$$\dot{y}=By+P^{-1}(t)f(t)\xrightarrow{\text{def}}By+g(t),\tag{1.10}$$

这里如果f在$\mathscr{B}(-\infty,\infty)$（或$\mathscr{A}\mathscr{D}$）内，$g$就在$\mathscr{B}(-\infty,\infty)$（或$\mathscr{A}\mathscr{D}$）内．由于$P(t)$是非奇异矩阵，因此只要证明：对于每个$g\in\mathscr{B}(-\infty,\infty)$，(1.10)在$\mathscr{B}(-\infty,\infty)$内有一个解，当且仅当$\dot{y}=By$对于$\mathscr{B}(-\infty,\infty)$是非临界的；即$B$没有零实部的特征值，这对于定理的第一部分就足够了．

利用相似变换，我们可以假定

$$B=\mathrm{diag}(B_+,B_0,B_-),$$

这里的$B_+(B_0)(B_-)$的所有特征值是正（零）（负）实部的．如果将$y=(u,v,w)$，$g=(g_+,g_0,g_-)$这样分块，使得矩阵的分块乘法与B的分块协调，则(1.10)等价于

$$\begin{aligned}&(a)\dot{u}=B_+u+g_+,\\&(b)\dot{v}=B_0v+g_0,\\&(c)\dot{w}=B_-w+g_-.\end{aligned}\tag{1.11}$$

存在正的常数K,α使得

$$\begin{aligned}&(a)|e^{B_+t}|\leqslant Ke^{\alpha t},\quad t\leqslant 0,\\&(b)|e^{B_-t}|\leqslant Ke^{-\alpha t},\quad t\geqslant 0.\end{aligned}\tag{1.12}$$

方程(1.11a)、(1.11b)在$(-\infty,\infty)$有唯一的有界解，分别是

$$(a)(\mathscr{K}_+g_+)(t)=\int_{\infty}^{0}e^{B_+s}g_+(t+s)ds,$$
$$(b)(\mathscr{K}_-g_-)(t)=\int_{-\infty}^{0}e^{-B_-s}g_-(t+s)ds. \tag{1.13}$$

可以直接验证它们或应用引理Ⅱ.6.1. 这些注释说明，如果 $\dot{y}=By$ 对于 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$ 是非临界的，则在 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$ 内(1.10)有唯一解 $\mathscr{K}f$. 并且，利用 (1.12) 我们看出 $|\mathscr{K}_+g_+|\leqslant(K/\alpha)|g_+|$, $|\mathscr{K}_-g_-|\leqslant(K/\alpha)|g_-|$. 因此 $\mathscr{K}f$ 满足(1.8).

如果矩阵 B 有一些特征值的实部为零；即(1.11b)中的向量 v 不是零维的，我们说明在 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$ 中存在一个 g_0, 使得(1.10)的所有解在 $(-\infty,\infty)$ 内是无界的. 这就将完成情况 2 的证明. 不损一般性，我们可以假定 $B_0=\mathrm{diag}(B_{01},\cdots,B_{0s})$，这里 $B_{0j}=i\omega_jI+R_j$ 而 R_j 只有零是特征值. 由于 $i\omega_j$ 可以通过乘法变换 $\exp(i\omega_jt)$ 消掉，只要考虑诸矩阵 B_{0j} 中的一个就够了. 于是，我们考虑方程

$$\dot{x}=Rx+g,$$

这里 R 只有零是特征值，而 g 在 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$ 内. 对于任意行向量 a,

$$a\dot{x}=aRx+ag$$

对所有 t 成立. 如果 $a\neq0$ 选得使 $aR=0$ 与 $g=a^*$，这里 a^* 是 a 的共轭转置，则 $a\dot{x}=|a|^2>0$, 它意味着对于每个解 $x(t)$ 有 $ax(t)\to\infty$. 因此当 $t\to\infty$ 时每个解是无界的. 这就完成了情况 2 的证明. 请注意，如果 B 有实部为零的特征值，在(1.10)中选取的使得所有解无界的 g 实际上就是周期函数，因此，$f=P(t)g$ 是殆周期(拟周期)函数，如果(1)有纯虚数的特征指数，f 就使得(1.1)的所有解无界.

情况 3. $\mathscr{D}=\mathscr{A}\mathscr{P}$. 前面的注释意味着：对于所有 $\mathscr{A}\mathscr{P}$ 中的 f，(1.1)在 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$ 内有一个解，当且仅当(1)没有零实部的

特征指数，或者等价地说，(1)对于 $\mathscr{A}\mathscr{P}$ 是非临界的。如果(1)对于 $\mathscr{A}\mathscr{P}$ 是非临界的，则在 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$ 内的唯一解 $\mathscr{K}f$ 是在(1.13)中给定的函数的周期变换，其中 g_+, g_- 是其加法群包含在 $m[f,A]$内的殆周期函数. 因此，留下来需要说明的只是(1.13)中的函数是在 $\mathscr{A}\mathscr{P}$ 中的，并且它们的加法群在 $m[f,A]$内. 我们利用附录中的定理 8. 假设 g_+ 在 $\mathscr{A}\mathscr{P}$ 内，又令 τ_m 为任何一个这样的实数序列，当 $m\to\infty$ 时，对 $t\in(-\infty,\infty)$一致地有 $g_+(t+\tau_m)-g_+(t)\to 0$. 令 $g_+^m(t)=g_+(t+\tau_m)$. 由于 $\mathscr{K}_+g_+$ 是 (1.11a) 在 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$内的唯一解，$B_+$ 是常矩阵，以及 $\mathscr{K}_+$ 是线性的与连续的，我们有

$$
\begin{aligned}
|(\mathscr{K}_+g_+)(t+\tau_m)-(\mathscr{K}_+g_+)(t)| &= |(\mathscr{K}_+g_+^m)(t)-(\mathscr{K}_+g_+)(t)| \\
&= |\mathscr{K}_+(g_+^m-g_+)(t)| \\
&\leqslant (K/\alpha)|g_+^m-g_+|
\end{aligned}
$$

对于所有$(-\infty,\infty)$中的 t 成立. 这意味着当 $m\to\infty$ 时在$(-\infty,\infty)$上一致地有$|(\mathscr{K}_+g_+)(t+\tau_m)-(\mathscr{K}_+g_+)(t)|\to 0$. 由附录的定理 8 推知$\mathscr{K}_+g_+$ 在$\mathscr{A}\mathscr{P}$ 内，而且$m[\mathscr{K}_+g_+]\subset m[g_+]\subset m[f,A]$. 同样的论证可以应用到 $\mathscr{K}_-g_-$，这样完成情况 3 的证明，也就证明了定理.

习题 1.4. 设 $\mathscr{K}$ 是定理 1.1 中定义的算子. 证明或驳斥：对于每个 $f\in\mathscr{A}\mathscr{P}$，有关系式 $m[\mathscr{K}f]=m[f,A]$.

定理 1.1 清楚地说明，在一大类解中，要求非齐次方程(1.1)的某些解对于强迫函数 f 有确定的性质，就要对齐次方程加上很强的条件. 当 A 不属于 $\mathscr{P}_T$ 时，可以作出相似的结论，但是分析起来很困难. 为了叙述这方面最简单的结果，要某些有独立意义的引理作准备.

引理 1.2. 如果 $A(t)$, $0\leqslant t<\infty$, 是连续的 $n\times n$ 矩阵，$|A(t)|<M$，而$X(t,\tau)$($X(\tau,\tau)=I$)是(1)的主矩阵解，则存在

$\delta>0$，使得对于所有 $t, \tau, s\geqslant 0$ 与 $|s-\tau|\leqslant\delta$ 有

$$|X(t, s)-X(t, \tau)|\leqslant\frac{1}{2}|X(t, \tau)|.$$

证明 由于对所有 t，τ，$s\in[0, \infty)$ 有 $X(t, s)=X(t, \tau)X(\tau, s)$，只要证明存在 $\delta>0$ 使得对于 $\tau, s\geqslant 0$，$|\tau-s|\leqslant\delta$，有 $|X(\tau, s)-I|\leqslant 1/2$ 就行了．由于

$$X(\tau, s)-I=\int_s^\tau A(u)[X(u, s)-I]du+\int_s^\tau A(u)du,$$

利用 Gronwall 不等式，对于所有 τ、s 有 $|X(\tau, s)-I|\leqslant M|\tau-s|e^{M|t-\tau|}$．如果 δ 使得 $M\delta e^{M\delta}\leqslant 1/2$，引理就证明了．

引理 1.3． 设 A 与 $X(t, \tau)$ 的意义和引理 1.2 中相同，则对于所有 $t\geqslant 0$，$\int_0^t|X(t, s)|ds<c$（c 为常数）这一条件意味着 $0\leqslant s\leqslant t<\infty$ 时 $|X(t, s)|$ 一致有界；也就是说，对于 $t_0\geqslant 0$ 方程(1)一致稳定．

证明 由于对所有 s, t 有 $X(t, s)X(s, t)=I$，推知 $X(t, s)$ 作为 s 的函数是伴随方程的基本矩阵解．因此对所有 t, s，

$$X(t, s)=I+\int_s^t X(t, \xi)A(\xi)d\xi.$$

特别地，对于 $0\leqslant s\leqslant t$，定理的假设意味着 $|X(t, s)|\leqslant 1+Mc$．从定理 Ⅲ.2.1 推出一致稳定性．这就证明了引理．

定理 1.2． 如果 $A(t)$，$0\leqslant t<\infty$，是连续的 $n\times n$ 矩阵，$|A(t)|<M$，则：对于每个在 $[0, \infty)$ 上有界的连续的 f，(1.1)的每个解在 $[0, \infty)$ 上有界，当且仅当系统(1)是一致渐近稳定的．

证明 我们首先证明，如果对于每个在 $[0, \infty)$ 上有界的连续的 f，(1.1)的每个解在 $[0, \infty)$ 上有界，则对于 $t\geqslant 0$ 有 $\int_0^t|X(t, s)|ds<c$（c 为常数）．(1.1)的满足 $x(0)=0$ 的解是

$$x(t)=\int_0^t X(t,s)f(s)ds.$$

设 $\mathscr{B}[0,\infty)$ 是连续而且有界的函数 $f:[0,\infty)\to C^n$ 的类，又令 $|f|=\sup\limits_{0\leqslant t<\infty}|f(t)|$. 对于 $[0,\infty)$ 内任何固定的 t, 考虑映射 T_t: $\mathscr{B}[0,\infty)\to\mathscr{B}[0,\infty)$, 它由

$$(T_tf)(\alpha)=\begin{cases}\int_0^\alpha X(\alpha,s)f(s)ds, & 0\leqslant\alpha\leqslant t,\\ \int_0^t X(t,s)f(s)ds, & t\leqslant\alpha<\infty\end{cases}$$

给出. 对于每个固定的 t, T_t 是连续的线性映射. 并且根据假设，对于 $\mathscr{B}[0,\infty)$ 中的每个 f, 有常数 N, 使得 $0\leqslant t<\infty$ 时 $|T_tf|\leqslant N$. 因此，由一致有界原理推出存在着常数 K, 使得对于所有 $t\in[0,\infty)$, $f\in\mathscr{B}[0,\infty)$ 有 $|T_tf|\leqslant K|f|$. 特别地

$$\left|\int_0^t X(t,s)f(s)ds\right|\leqslant K|f|,\quad 0\leqslant t<\infty.$$

如果 $X=(x_{jk})$, 令 $f_t^{j,k}(s)$ 为对于固定的 t 而言 $x_{jk}(t,s)$ 的符号函数，$j,k=1,2,\cdots,n$. 选取一个一致有界的连续函数序列 $f_{t,r}^{j,k}(s)$, 它在 $[0,\infty)$ 上几乎处处逐点趋于 $f_t^{j,k}(s)$. 把向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的范数选作 $|x|=\max\limits_j|x_j|$. 对于任意给定的 j、k, 令 $f_t(s)$ 与 $f_{t,r}(s)$ 是这样的 n 维向量，除开第 k 个分量分别是 $f_t^{j,k}(s)$ 与 $f_{t,r}^{j,k}(s)$, 其它分量都是零. 则

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^t X(t,s)f_{t,r}(s)ds=\int_0^t X(t,s)f_t(s)ds.$$

从上面对向量范数的定义与

$$\left|\int_0^t X(t,s)f_{t,r}(s)ds\right|\leqslant K|f_{t,r}|\leqslant K_1,\quad 0\leqslant t<\infty$$

这一事实，推出对所有 $t\geqslant0$ 与 $j,k=1,2,\cdots,n$,

$$\int_0^t|x_{jk}(t,s)|ds\leqslant\left|\int_0^t X(t,s)f_t(s)ds\right|\leqslant K_1.$$

由于在C^n中所有范数等价，这个不等式显然意味着存在常数c，使得$0\leqslant t<\infty$时$\int_0^t|X(t,s)|ds<c$.

根据引理1.3，这个关系意味着$0\leqslant\tau\leqslant s<\infty$时$X(s,\tau)$一致有界(其界为某常数$N$)，于是方程(1)当$t_0\geqslant0$时一致稳定．因此对所有$t\geqslant\tau$有

$$\left|\int_\tau^t X(t,s)X(s,\tau)ds\right|\leqslant\int_\tau^t|X(t,s)|\cdot|X(s,\tau)|ds\leqslant Nc.$$

但是这不等式最左边的表达式等于$(t-\tau)|X(t,\tau)|$．因此当$t\to\infty$时$|X(t,\tau)|$一致地趋于零，而且方程(1)一致渐近稳定．

反过来，假设系统(1)当$t_0\geqslant0$时一致渐近稳定．根据定理Ⅲ.2.1，存在正的常数K,α，使得

$$|X(t,\tau)|\leqslant Ke^{-\alpha(t-\tau)},\ 0\leqslant\tau\leqslant t<\infty.$$

(1.1)的通解是

$$x(t)=X(t,0)x(0)+\int_0^t X(t,s)f(s)ds,\quad t\geqslant0.$$

如果f在$\mathscr{B}[0,\infty)$内，则对于所有$t\geqslant0$，$|x(t)|\leqslant K|x(0)|+|f|\cdot(K/\alpha)$，于是(1.1)的每个解在$\mathscr{B}[0,\infty)$内．这就证明了定理．

定理1.2应归于Perron[1]，在通过观察强迫函数在某给定的函数类中的非齐次方程的解的特性，来确定齐次方程解的特性这一方面，它是第一个一般性的陈述．沿着这条路线进行的探讨一直继续到今天，最有意义的新近贡献是Massera与Schäffer[1]作出的．为了较好地评价这个问题，我们用另一种方式复述它．设$(\mathscr{B},\mathscr{D})$是两个Banach空间，它们的元素都是把$[\sigma,\infty)$映入$C^n$的函数($\sigma$可以是有限数或无穷)．如果对于每个$f\in\mathscr{D}$，(1.1)在$\mathscr{B}$内至少有一个解$x$，就说$(\mathscr{B},\mathscr{D})$这一对空间对于方程(1.1)是容许的．定理1.1说明，$(\mathscr{B}(-\infty,\infty),\mathscr{B}(-\infty,\infty))$、$(\mathscr{AP},\mathscr{AP})$、$(\mathscr{P}_T,\mathscr{P}_T)$对于方程(1.1)是容许的，当且仅当方程(1)分别对于

$\mathscr{B}(-\infty,\infty)$、$\mathscr{AP}$、$\mathscr{P}_T$ 是非临界的. 定理 1.2 指出, 如果(1)一致渐近稳定, 则($\mathscr{B}[0,\infty)$, $\mathscr{B}[0,\infty)$)对于 (1.1)是容许的. 对这种容许对作进一步的研究是极有意义的, 读者可参考 Coppel[1, 第五章]、Hartman [1, 第十三章] 和 Massera 与 Schäffer [1], Antosiewicz[2].

IV.2. 弱非线性系统——非临界情形

本节始终假定 A 是 $\mathscr{P}_T$ 内的连续的 $n\times n$ 矩阵, $\Omega(\rho,\sigma)=\{x\in C^n, e\in C^r:|x|\leqslant\rho, |e|\leqslant\sigma\}$, $\eta(\rho,\sigma)$, $M(\sigma)$ 是 $\rho\geqslant 0$, $\sigma\geqslant 0$ 的连续函数, 它们对两个变量都是非降的, $\eta(0,0)=0$, $M(0)=0$, 又 $\mathscr{L}ip(\eta,M)=\{q:R\times\Omega(\rho_0,e_0)\to C^n$: 对于所有 $(t,x,e),(t,y,e)\in R\times\Omega(\rho,\sigma)$, $0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$, $0<\sigma<e_0$, q 连续, $|q(t,0,e)|\leqslant M(|e|)$, $|q(t,x,e)-q(t,y,e)|\leqslant\eta(\rho,\sigma)|x-y|\}$.

如果 q 在 $\mathscr{L}ip(\eta,M)$ 内, 则 $q(\cdot,x,e)$ 自动地属于 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$. 事实上, 对于 $(t,x,e)\in R\times\Omega(\rho,\sigma)$ 有 $|q(t,x,e)|\leqslant\eta(\rho,\sigma)\times|x|+M(|e|)$. 如果 q 在 $\mathscr{L}ip(\eta,M)$ 内, 又当 x, e 在紧集内时, $q(t,x,e)$ 对于 x, e 而言一致地是 t 的殆周期函数, 就说 q 在 $\mathscr{AP}\cap\mathscr{L}ip(\eta,M)$ 内. 如果函数 q 在 $\mathscr{L}ip(\eta,M)$ 内, 并且对所有 $(t,x,e)\in R\times\Omega(\rho_0,e_0)$, 有 $q(t+T,x,e)=q(t,x,e)$, 就说 q 在 $\mathscr{P}_T\cap\mathscr{L}ip(\eta,M)$ 内.

如果当 $x\to 0$、$e\to 0$ 时, 对 t 一致地成立 $q(t,x,e)\to 0$ 与 $\partial q(t,x,e)/\partial x\to 0$, 对这样的函数 q, 显然有某 η, M, 使得 q 在 $\mathscr{L}ip(\eta,M)$ 内.

在本节里, 给出关于非线性方程

$$\dot{x}=A(t)x+q(t,x,e) \tag{2.1}$$

的有界的殆周期解与周期解的存在性的结果, 这里 q 在 $\mathscr{L}ip(\eta,M)$ 内, 而齐次方程(1)是非临界的. 具体地说, 我们证明

定理 2.1. 假设 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$, $\mathscr{A}\mathscr{P}$ 或 $\mathscr{P}_T$ 三类之一. 如果 q 在 $\mathscr{D}\cap\mathscr{L}ip(\eta, M)$ 内, 又系统(1)对于 $\mathscr{D}$ 是非临界的, 则存在常数 $\rho_1>0$、$\varepsilon_1>0$ 与 $\mathscr{D}$ 内的函数 $x^*(t,\varepsilon)$, 它当 $-\infty<t<\infty$, $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$ 时, 是 t,ε 的连续函数, $x^*(t,0)=0$, 当 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$ 时, $x^*(\cdot,\varepsilon)$ 在 $\mathscr{D}$ 内, $|x^*(\cdot,\varepsilon)|\leqslant\rho_1$, 使得 $x^*(t,\varepsilon)$ 是 (2.1) 的一个解, 并且是(2.1)的在 $\mathscr{D}$ 内仅有的范数 $\leqslant\rho_1$ 的解. 如果 $\mathscr{D}=\mathscr{A}\mathscr{P}$, 则 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$ 时 $m[x^*(\cdot,\varepsilon)]\subset m[q,A]$.

证明 对于给定的满足 $0<\rho_1\leqslant\rho_0$ 的 ρ_1, 令 $\mathscr{D}_{\rho_1}=\{x\in\mathscr{D}: |x|\leqslant\rho_1\}$. 于是 $\mathscr{D}_{\rho_1}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{D}$ 中的一个闭的有界子集. 对于任意 $x\in\mathscr{D}_{\rho_1}$, 函数 $q(\cdot,x(\cdot),\varepsilon)$ 属于 $\mathscr{D}$. 由于假定系统(1)对于 $\mathscr{D}$ 是非临界的, 我们可以考虑 x 在 $\mathscr{D}$ 内的变换 $w=\mathscr{T}x$, 其定义为

$$w=\mathscr{T}x=\mathscr{K}q(\cdot,x(\cdot),\varepsilon), \tag{2.2}$$

这里的 $\mathscr{K}$ 是由定理 1.1 所唯一确定的算子. 根据定理 1.1 有 $\mathscr{T}:\mathscr{D}_{\rho_1}\to\mathscr{D}$. 并且, $\mathscr{T}$ 在 $\mathscr{D}_{\rho_1}$ 中的不动点与(2.1)在 $\mathscr{D}_{\rho_1}$ 内的解重合. 现在我们用压缩原理证明, 当 ρ_1 与 $|\varepsilon|$ 充分小时, $\mathscr{T}$ 在 $\mathscr{D}_{\rho_1}$ 内有唯一的不动点.

由于 q 在 $\mathscr{L}ip(\eta, M)$, 对于 $(t,x,\varepsilon)\in R\times\Omega(\rho_1,\varepsilon_1)$ 有

$$\begin{aligned}|q(t,x,\varepsilon)|&\leqslant|q(t,x,\varepsilon)-q(t,0,\varepsilon)|+|q(t,0,\varepsilon)|\\&\leqslant\eta(\rho_1,\varepsilon_1)|x|+M(\varepsilon_1).\end{aligned} \tag{2.3}$$

设 K 是(1.8)中确定了的常数, 选取满足 $0<\rho_1\leqslant\rho_0$, $0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$ 并且甚小的 ρ_1、ε_1, 以致

$$K[\eta(\rho_1,\varepsilon_1)\rho_1+M(\varepsilon_1)]<\rho_1.$$

对于这样选取的 ρ_1, ε_1, 从关系式(1.8)、(2.2)、(2.3)以及 q 在 $\mathscr{L}ip(\eta, M)$ 中的事实, 推知对于 $\mathscr{D}_{\rho_1}$ 中所有 x、y 及满足 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$ 的 ε,

$$|\mathscr{T}x|\leqslant K|q(\cdot,x(\cdot),\varepsilon)|\leqslant K[\eta(\rho_1,\varepsilon_1)|x|+M(\varepsilon_1)]<\rho_1,$$

$$|\mathscr{T}x-\mathscr{T}y|\leqslant K|q(\cdot,x(\cdot),e)-q(\cdot,y(\cdot),e)|$$
$$\leqslant K\eta(\rho_1,e_1)|x-y|<\theta|x-y|,$$

其中 $\theta<1$ 是一个正的常数．因此，当 $|e|\leqslant e_1$ 时，$\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{D}_{\rho_1}$ 上的一致压缩，它在 $\mathscr{D}_{\rho_1}$ 内有唯一不动点．由于 $q(t,x,e)$ 连续，$\mathscr{T}$ 的不动点 $x^*(t,e)$ 对 $-\infty<t<\infty,0\leqslant|e|\leqslant e_1$ 的 t、e 是连续的．当 $e=0$ 时，$x=0$ 显然是(2.1)的解．因之 $x^*(\cdot,0)=0$ 也如此．定理的最后一个论点从定理 1.1 推出，于是证毕．

定理 2.1 对于方程

$$\dot{x}=A(t)x+b(t)+eh(t,x,e) \tag{2.4}$$

有一个有趣的结论，其中：e 是纯量，h 在 $R\times\Omega(\rho_0,e_0)$ 内连续，并且对于 $(-\infty,\infty)$ 中的 t 与 $|e|\leqslant e_0$ 的 e 而言一致地，h 对 x 满足局部 Lipschitz 条件，b 在 $\mathscr{D}$ 内，系统(1)对于 $\mathscr{D}$ 是非临界的．自然，与前面一样，$\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$，$\mathscr{AP}$，或 $\mathscr{P}_T$ 三类之一．在这些假定下，定理 1.1 意味着

$$\dot{x}=A(t)x+b(t)$$

在 $\mathscr{D}$ 内有唯一解 $\mathscr{K}b$．如果 $|\mathscr{K}b|<\rho_0$，在 (2.4) 中令 $x=y+\mathscr{K}b$，则

$$\dot{y}=A(t)y+eh(t,y+\mathscr{K}b,e)\xlongequal{\text{def}}A(t)y+q(t,y,e).$$

由于当 $e\to0$ 时 $q(t,y,e)$ 的趋于零至少有 e 的线性函数那么快，函数 q 在 $\mathscr{L}ip(\eta,M)$ 里，$\eta(\rho,\sigma)=\sigma\eta_1(\rho,\sigma)$，这里 $\eta_1(\rho,\sigma)$ 是 ρ、σ 的连续函数．因此，由定理 2.1 推知(2.4)有这样的解 $x^*(t,e,b)$，$x^*(t,e,b)$ 在 $\mathscr{D}$ 内，$x^*(\cdot,0,b)=\mathscr{K}b$，并且 $x^*(t,e,b)$ 是(2.4)仅有的在 $\mathscr{D}$ 内同时也在 $\mathscr{K}b$ 的 ρ_1 邻域内的解．

IV．3．一般鞍点性质

上一节的定理 2.1 断言，在函数类 $\mathscr{D}$ 中，(2.1)有特异解

$x^*(\cdot,e)$. 这个解的稳定性质怎样？如果线性系统(1)的特征指数的实部都不是零，人们会希望 $x^*(\cdot,e)$ 与(1)的解 $x=0$ 有相同的稳定性质. 本节的目的是：证明情况确实如此，还要讨论(2.1)的接近 $x^*(\cdot,e)$ 的解的某些几何性质，讨论的方式与在 Ⅲ.6节中讨论鞍点性质所用的方式相同. 证明过程几乎是仿照 Ⅲ.6 节中的相应过程，但是稍为复杂，这是由于微分方程明显地依赖于 t 的缘故.

为了把方程化到比较简单的形式，令

$$x=x^*(\cdot,e)+y \tag{3.1}$$

这里 $x^*(\cdot,e)$ 是定理 2.1 中给定的函数. 如果 x 是(2.1)的解，则 y 是

$$\dot{y}=A(t)y+p(t,y,e) \tag{3.2}$$

的解，这里 $p(t,y,e)=q(t,x^*(t,e)+y,e)-q(t,x^*(t,e),e)$. 因此，如果 q 在 $\mathscr{L}_{ip}(\eta,M)$ 内，则 p 在 $\mathscr{L}_{ip}(\eta,0)$ 内. 为了更进一步简化方程，令 $X(t)=P(t)e^{Bt}(P(t+T)=P(t)$, B 是常矩阵)是(1)的基本矩阵解，又令 $y=P(t)z$. 如果 y 是(3.2)的解，则 z 是

$$\dot{z}=Bz+f(t,z,e) \tag{3.3}$$

的解，这里 $f(t,z,e)=P^{-1}(t)p(t,P(t)z,e)$. 我们最后可以断言，如果 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$, $\mathscr{A}\mathscr{D}$ 或 $\mathscr{P}_T$ 三类之一，而 q 在 $\mathscr{D}\cap\mathscr{L}ip(\eta,M)$ 内，则 f 在 $\mathscr{D}\cap\mathscr{L}ip(\eta,0)$ 内. 关于系统 (3.3) 作出的任何断言，通过上面的变换容易引伸到系统(2.1)，产生出相应的结论.

下面，集中围绕着(3.3)来讨论，并假定 f 在 $\mathscr{L}ip(\eta,0)$ 内，而矩阵 B 的特征值的实部全不是零，其中 k 个有正实部，$n-k$ 个有负实部. 如同 Ⅲ.6 节一样，空间 C^n 可以分解为

$$C^n=C^n_+\oplus C^n_-,\quad C^n_+=\pi_+C^n, C^n_-=\pi_-C^n, \tag{3.4}$$

这里 π_+、π_- 是射影算子，C^n_+、C^n_- 的维数分别是 k、$n-k$，都是在 B 之下的不变量，而且存在正的常数 K、α，使得

$$
\begin{aligned}
&(a)\ |e^{Bt}\pi_+ z| \leqslant K e^{\alpha t}|\pi_+ z|, \quad t\leqslant 0,\\
&(b)\ |e^{Bt}\pi_- z| \leqslant K e^{-\alpha t}|\pi_- z|, \quad t\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

对于$(-\infty,\infty)$中任意的σ，令$z(t,\sigma,z^\sigma,\varepsilon)$记(3.3)的满足$z(\sigma,\sigma,z^\sigma,\varepsilon)=z^\sigma$的解，令$K$记(3.5)中的常数，又对于任意$\delta>0$，定义

$$
(a)\ S(\sigma,\delta,\varepsilon)=\left\{z^\sigma\in C^n:|\pi_- z^\sigma|<\frac{\delta}{2K},\ |z(t,\sigma,z^\sigma,\varepsilon)|<\delta,\ t\geqslant\sigma\right\}, \tag{3.6}
$$

$$
(b)\ U(\sigma,\delta,\varepsilon)=\left\{z^\sigma\in C^n:|\pi_+ z^\sigma|<\frac{\delta}{2K},\ |z(t,\sigma,z^\sigma,\varepsilon)|<\delta,\ t\leqslant\sigma\right\}.
$$

还令B_ρ^n记$\{z\in C^n:|z|<\rho\}$.

定理 3.1. 如果f在$\mathscr{L}ip(\eta,0)$内，而B的特征值的实部不是零，则存在$\delta>0$，$\varepsilon_1>0$，$\beta>0$，使得对于$(-\infty,\infty)$中任意σ与满足$0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$的任意$\varepsilon$，映射$\pi_-$是由$S(\sigma,\delta,\varepsilon)$到$(\pi_- C^n)\cap B_{\delta/2K}^n$的同胚，$S(\sigma,\delta,0)$在零点与$\pi_- C^n$相切，而且对$S(\sigma,\delta,\varepsilon)$中任意的$z^\sigma$

$$
|z(t,\sigma,z^\sigma,\varepsilon)|\leqslant 2K|\pi_- z^\sigma|e^{-\beta(t-\sigma)}, \quad t\geqslant\sigma \tag{3.7}
$$

映射π_+是由$U(\sigma,\delta,\varepsilon)$到$(\pi_+ C^n)\cap B_{\delta/2K}^n$的同胚，$U(\sigma,\delta,0)$在零点与$\pi_+ C^n$相切，而且对$U(\sigma,\delta,\varepsilon)$中任意的$z^\sigma$，

$$
|z(t,\sigma,z^\sigma,\varepsilon)|\leqslant 2K|\pi_+ z^\sigma|e^{\beta(t-\sigma)}, \quad t\leqslant\sigma. \tag{3.8}
$$

此外，如果$g(\cdot,\sigma,\varepsilon):(\pi_- C^n)\cap B_{\delta/2K}^n\to S(\sigma,\delta,\varepsilon)$是同胚$\pi_-$的逆映射，则$g(z_-,\sigma,\varepsilon)$对$z_-$满足 Lipschitz 条件，Lipschitz 常数是$2K$. 如果f在$\mathscr{A}\mathscr{P}\cap\mathscr{L}ip(\eta,0)$内，则$g(z_-,\sigma,\varepsilon)$是$\sigma$的殆周期函数，其加法群包含在$m[f]$内. 如果$f$在$\mathscr{P}_T\cap\mathscr{L}ip(\eta,0)$内，则$g(z_-,\sigma,\varepsilon)$是$\sigma$的周期为$T$的函数. 同样的结论对于由$U(\sigma,\delta,\varepsilon)$到$(\pi_+ C^n)\cap B_{\delta/2K}^n$的同胚$\pi_+$的逆映射成立.

在证明这个定理之先，让我们对它的几何意义与某些结论作一些说明. 附图 3.1 在使下述说明形象化方面可能是有用的. 对

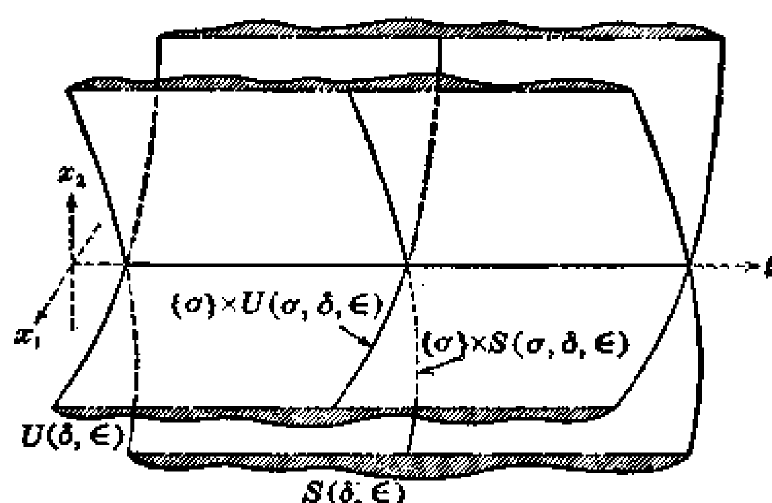


图 IV.3.1

于任意 $\sigma\in(-\infty,\infty)$，集合 $\{\sigma\}\times S(\sigma,\delta,e)$ 是 R^{n+1} 的子集．对于任意 $\tau\in[\sigma,t]$，$z(t,\sigma,z^{\sigma},e)=z(t,\tau,z(\tau,\sigma,z^{\sigma},e),e)$，因此，(3.3)的初始值在 $\{\sigma\}\times S(\sigma,\delta,e)$ 内的任何解对于使 $\pi_-z(\tau,\sigma,z^{\sigma},e)$ 的范数小于 $\delta/2K$ 的任意 $\tau\geqslant 0$，必定会穿过 $\{\tau\}\times S(\tau,\delta,e)$．由于可能不是对所有 $\tau\geqslant\sigma$ 都如此，因此对于所有 $\sigma\in(-\infty,\infty)$，$\{\sigma\}\times S(\sigma,\delta,e)$ 的并集在下述意义下可能不是一个积分流形：任何初始值 (τ,z^{τ}) 在此流形上的解的轨线，对于所有 $t\geqslant\tau$，仍旧在此流形上．另一方面，这个并集可以这样来拓展成为一个积分流形，把集合 $\{\sigma\}\times S(\sigma,\delta,e)$ 拓展成集合 $\{\sigma\}\times S^*(\sigma,\delta,e)$，这里

$$S^*(\sigma,\delta,e)=S(\sigma,\delta,e)\bigcup\{z:z=z(\sigma,\tau,z^{\tau},e),$$
$$\text{对于某些}\tau\leqslant\sigma,(\tau,z^{\tau})\text{ 在 }\{\tau\}\times S(\sigma,\delta,e)\text{内}\}.$$

于是 $\{\sigma\}\times S^*(\sigma,\delta,e)$ 的并集 $S(\delta,e)$ 是(3.3)的一个积分流形．由于在这个流形上的所有解当 $t\to\infty$ 时趋于零，而且它们是时间增大过程中仅有的落在零的某个邻域里的解，因之这个流形被正确地命名为稳定积分流形．用同样的方式定义集合

$$U^*(\sigma,\delta,e)=U(\sigma,\delta,e)\bigcup\{z:z=z(\sigma,\tau,z^{\tau},e),$$
$$\text{对于某些 }\tau\geqslant\sigma,(\tau,z^{\tau})\text{在}\{\tau\}\times U(\tau,\delta,e)\text{内}\}$$

与不稳定积分流形 $U(\delta,e)$．集合 $S(\delta,e)$ 与 $U(\delta,e)$ 都是超曲面，

分别同胚于 $R\times B_1^{n-k}$ 与 $R\times B_1^k$，并且 $S(\delta,e)\cap U(\delta,e)$ 是 t 轴。

如果 $k\geqslant1$，上面的说明意味着 (3.3) 的解 $z=0$ 对于 $|e|\leqslant\varepsilon_1$ 与任意 $\sigma\in(-\infty,\infty)$ 是不稳定的．根据(3.7)，如果 $k=0$，(3.3) 的解 $z=0$ 对 $|e|\leqslant\varepsilon_1$ 与 $t_0\geqslant\sigma$(σ 是 $(-\infty,\infty)$ 内的任意数) 是一致渐近稳定的。

如果(3.3)中的 B 与 f 是实的，则由只取实初始值所定义的集合 $S(\sigma,\delta,e)$ 与 $U(\sigma,\delta,e)$ 都在 R^n 内．如果系统(3.2)是实的，则若要求对所有 t 有 $P(t+T)=P(t)$，(1)的基本矩阵解 $X(t)$ 不一定能用都是实的 $P(t)$ 与 e^{Bt} 分解成 $X(t)=P(t)e^{Bt}$ (见 Ⅲ.7 节)．另一方面，如果只要求对所有 t 有 $P(t+2T)=P(t)$，则又可选定这种形式的实分解式。在这种情况下，系统 (3.3) 将是实的，但是如果 p 在 $\mathscr{P}_T\cap\mathscr{L}ip(\eta,0)$ 内，f 就属于 $\mathscr{P}_{2T}\cap\mathscr{L}ip(\eta,0)$．这意味着集合 $S(\sigma,\delta,e)$ 与 $U(\sigma,\delta,e)$ 对于 σ 将是周期为 $2T$ 而非 T 的周期性集合．

在定理的陈述中没有断言 $S(\sigma,\delta,e)$ 在零点与 π_-C^n 相切．这可能不对，因为 $f(t,y,e)$ 可能包含 y 的线性项，此项当 $e\to0$ 时仍然趋于零．由于扰动项 $f(t,z,e)$ 可能明显地依赖于 t，故定理 3.1 显然是定理 Ⅲ.6.1 的一个有力的推广．

定理 3.1 的证明　由于这个定理的证明如此相似于定理 Ⅲ.6.1 的证明，没有必要给出细节，而只需指出差异之处．用与引理 6.1 的证明相同的方式，容易证明，对于(3.3)的在 $[\sigma,\infty)$ 上有界的任意解 $z(t)$，必定存在 $z_-\in C_-^n$，使得

$$z(t)=e^{B(t-\sigma)}z_-+\int_\sigma^t e^{B(t-s)}\pi_-f(s,z(s),e)ds$$
$$+\int_\infty^0 e^{-Bs}\pi_+f(t+s,z(t+s),e)ds,\quad t\geqslant\sigma,\tag{3.9}$$

又对于 (3.3) 的在 $(-\infty,\sigma]$ 上有界的任意解 $z(t)$，存在 $z_+\in C_+^n$，使得

$$z(t)=e^{B(t-\sigma)}z_{+}+\int_{\sigma}^{t}e^{B(t-s)}\pi_{+}f(s,z(s),\varepsilon)ds$$

$$+\int_{-\infty}^{0}e^{-Bs}\pi_{-}f(t+s,z(t+s),\varepsilon)ds,\quad t\leqslant\sigma. \qquad (3.10)$$

我们首先讨论对于 $\pi_{-}C^{n}$ 中任意的 z_{-}，(3.9)在$[\sigma,\infty)$上的解的存在性．对于任意 $z\in C^{n}$，存在常数 K_1，使得 $|\pi_{+}z|\leqslant K_1|z|$，$|\pi_{-}z|\leqslant K_1|z|$．如果 K,α 是(3.5)中给定的常数，η 是 $f(t,z,\varepsilon)$ 对于 z 的 Lipschitz 常数，可选取 δ、ε_1 使得

$$4KK_1\eta(\delta,\varepsilon_1)\leqslant\alpha,\quad 8K^2K_1\eta(\delta,\varepsilon_1)<3\alpha. \qquad (3.11)$$

用这样选定的 δ,ε_1，对于 $\pi_{-}C^{n}$ 中满足$|z_{-}|\leqslant\delta/2K$ 的任意 z_{-}，定义 $\mathscr{S}(\sigma,z_{-},\delta)$为连续函数 $z:[\sigma,\infty)\to C^{n}$ 的集合，在其中 $|z|=\sup\limits_{\sigma\leqslant t<\infty}|z(t)|\leqslant\delta$，又 $\pi_{-}z(\sigma)=z_{-}$．$\mathscr{S}(\sigma,z_{-},\delta)$是由所有把$[\sigma,\infty)$映入 C^{n} 的有界连续函数用一致拓扑所成的 Banach 空间的闭有界子集．对于$\mathscr{S}(\sigma,z_{-},\delta)$中任意的 z，把 $\mathscr{T}z$ 定义为

$$(\mathscr{T}z)(t)=e^{B(t-\sigma)}z_{-}+\int_{\sigma}^{t}e^{B(t-s)}\pi_{-}f(s,z(s),\varepsilon)ds$$

$$+\int_{\infty}^{0}e^{-Bs}\pi_{+}f(t+s,z(t+s),\varepsilon)ds,\quad t\geqslant\sigma. \qquad (3.12)$$

完全像定理Ⅲ.6.1 的证明中一样，利用压缩原理可证明，当 $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$时，$\mathscr{T}$ 有唯一不动点 $z^*(\cdot,\sigma,z_{-},\varepsilon)$，$z^*(\cdot,\sigma,0,\varepsilon)=0$，$z^*(t,\sigma,z_{-},\varepsilon)$连续地依赖于 $t,\sigma,z_{-},\varepsilon$，而且对于 $t\geqslant\sigma$

$$|z^*(t,\sigma,z_{-},\varepsilon)-z^*(t,\sigma,\tilde{z}_{-},\varepsilon)|\leqslant 2K\exp\left[\frac{-\alpha(t-\sigma)}{2}\right]|z_{-}-\tilde{z}_{-}|. \qquad (3.13)$$

从 $S(\sigma,\delta,\varepsilon)$ 的定义与上面关于 $z^*(\cdot,\sigma,z_{-},\varepsilon)$ 的作法，推知对于$|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$

$$S(\sigma,\delta,\varepsilon)=\{z:z=z^*(\sigma,\sigma,z_{-},\varepsilon),z_{-}\text{ 在}(\pi_{-}C^{n})\cap B_{\delta/2K}\text{ 内}\} \qquad (3.14)$$

从关系(3.14)、(3.13)以及 $z^*(\cdot,\sigma,0,\varepsilon)=0$ 这一事实，推出关系

式(3.7),其中 $\beta=\alpha/2$. 如果我们令 $g(z_-,\sigma,\varepsilon)=z^*(\sigma,\sigma,z_-,\varepsilon)$,则

$$g(z_-,\sigma,\varepsilon)=z_-+\int_{\infty}^{0}e^{-Bs}\pi_+f(\sigma+s,z^*(\sigma+s,\sigma,z_-,\varepsilon),\varepsilon)ds. \tag{3.15}$$

同在定理Ⅲ.6.1的证明中一样,对于$(-\infty,\infty)$任意的σ与$|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$,有

$$|g(z_-,\sigma,\varepsilon)|-|g(\tilde{z},\sigma,\varepsilon)|\geqslant\frac{|z_--\tilde{z}_-|}{2}.$$

这说明$g(\cdot,\sigma,\varepsilon)$是由$(\pi_-C^n)\cap B_{\delta/2K}$入$S(\sigma,\delta,\varepsilon)$的一对一的映射. 由于这个映射的逆映射是$\pi_-$,因而是连续的,得知它是同胚. 还容易求得下述估计:

$$|\pi_+z^*(\sigma,\sigma,z_-,\varepsilon)|\leqslant\frac{4K^2K_1}{\alpha}\eta(2K|z_-|,|\varepsilon|)|z|.$$

由于$\pi_-z^*(\sigma,\sigma,z_-,\varepsilon)=z_-$,从$\eta$的性质推知$S(\sigma,\delta,0)$在零点与$\pi_-C^n$相切,关系式(3.13)意味着集合$S(\sigma,\delta,0)$是一个 Lipschitz 流形.

现在假设f在$\mathscr{A}\mathscr{D}\cap\mathscr{L}ip(\eta,0)$内. 我们来证明$S(\sigma,\delta,\varepsilon)$的表达式$g(z_-,\sigma,\varepsilon)$是$\sigma$的殆周期函数,其加法群包含在$m[f]$内. 根据(3.5),必须估计$z^*(\sigma+s,\sigma,z_-,\varepsilon)$——作为$\sigma$与$s$的函数. 为了简化记号,令$z(t,\sigma)=z^*(t,\sigma,z_-,\varepsilon)$, $f(t,z)=f(t,z,\varepsilon)$. $z(\sigma+t,\sigma)$的方程成为

$$z(\sigma+t,\sigma)=e^{Bt}z_-+\int_0^t e^{B(t-s)}\pi_-f(\sigma+s,z(\sigma+s,\sigma))ds$$
$$+\int_{\infty}^{0}e^{-Bs}\pi_+f(\sigma+t+s,z(\sigma+t+s,\sigma))ds. \tag{3.16}$$

我们的目的是说明如果f在$\mathscr{A}\mathscr{D}\cap\mathscr{L}ip(\eta,0)$内,$z(\sigma+t,\sigma)$就是$\sigma$的殆周期函数. 假设$\{\tau_m\}(m=1, 2, \cdots)$是任何这样的实数序列,当$m\to\infty$时,对于$|z|\leqslant\delta$而言,在$(-\infty,\infty)$上一致地有$f(t+$

$\tau_m, z)-f(t, z)\to 0$. 如果 $u(t, \sigma, \tau_m)=|z(\sigma+t+\tau_m, \sigma+\tau_m)-z(\sigma+t,\sigma)|$，则(3.16)意味着

$$u(t,\sigma,\tau_m)\leqslant KK_1\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\eta(\delta,\varepsilon_1)u(s,\sigma,\tau_m)ds$$
$$+KK_1\int_0^\infty e^{-\alpha s}\eta(\delta,\varepsilon_1)u(t+s,\sigma,\tau_m)ds+\frac{2KK_1}{\alpha}\gamma_m,$$

这里 $\gamma_m=\sup\limits_{\substack{-\infty<s<\infty\\|z|\leqslant\delta}}|f(s+\tau_m,z)-f(s,z)|$. 利用不等式(3.11)，容易看出对所有 m 有 $u(t,\sigma,\tau_m)\leqslant 4KK_1\gamma_m/\alpha$. 由于 $m\to\infty$ 时 $\gamma_m\to 0$，推出 $m\to\infty$ 时 $u(t,\sigma,\tau_m)\to 0$，因此附录的定理 8 意味着 $z(\sigma+t, \sigma)$ 是 σ 的殆周期函数，其加法群包含在 f 的加法群内. 特别地，$g(z_-,\sigma,\varepsilon)=z^*(\sigma,\sigma,z_-,\varepsilon)$ 是加法群包含在 $m[f]$ 内的殆周期函数.

如果 f 在 $\mathscr{D}_T\cap\mathscr{L}ip(\eta,0)$ 内，则由于从(3.16)的解的唯一性直接看出 $z(\sigma+t+T,\sigma+T)=z(\sigma+t,\sigma)$ 对所有 σ、t 成立，所以对所有 σ 有 $g(z_-,\sigma+T,\varepsilon)=g(z_-,\sigma,\varepsilon)$.

依照与上面相同的方式，可以用(3.10)证明关于 $U(\sigma,\delta,\varepsilon)$ 的断言，定理证毕.

说明上述结果的一个简单例子是强迫 van der Pol 方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=-x_1+k(1-x_1^2)x_2+\varepsilon g(t).\end{aligned}\tag{3.17}$$

这里的 $k\neq 0$ 与 ε 是实参数，而 g 在 $\mathscr{A}\mathscr{D}$ 内，如果 $x=(x_1,x_2)$，这个系统是(2.1)形的，其中

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & k\end{bmatrix},\quad q(t,x,\varepsilon)=\begin{bmatrix}0\\ -kx_1^2x_2+\varepsilon g(t)\end{bmatrix}.$$

由于 $k\neq 0$，A 的特征值的实部不是零，而 q 在 $\mathscr{A}\mathscr{D}\cap\mathscr{L}ip(\eta,M)$ 内，这里的 $\eta(\rho)=K\rho^2$（K 是某常数），$M=\varepsilon\sup\limits_t|g(t)|$. 因此，由定理 2.1 推知存在 $\rho_1>0$，$\varepsilon_1>0$，使得(3.17)有殆周期解 $x^*(t,\varepsilon)$，

$m[x^*(\cdot,\varepsilon)]\subset m[g]$, $x^*(\cdot,0)=0$, 这个解还是在 $x_1=x_2=0$ 的 ρ_1 邻域内的唯一解. 由于 $k<0$ 时 A 的特征值是负实部的, 而 $k>0$ 时特征值是正实部的, 定理 3.1 断言解 $x^*(t,\varepsilon)$ 当 $k<0$ 时渐近稳定, 当 $k>0$ 时不稳定.

当 $\varepsilon=0$ 时, 我们已在定理 Ⅱ.1.6 中看到 van der Pol 方程对于任意 $k>0$ 有唯一的渐近轨道稳定极限环. 这在几何上意味着在 (x_1, x_2, t) 空间中由极限环生成的柱面是渐近稳定的. 因此, 直观上很明显(也可以很精确地说明), 当 ε 小时必定有这个柱面的一个邻域, (3.17) 的解只进入它而不离开它. 这个"稳定"的邻域确实比上面确定的殆周期解 $x^*(\cdot,\varepsilon)$ 有意义, 因为当 $k>0$ 时 $x^*(\cdot,\varepsilon)$ 不稳定. 讨论在这个邻域里发生什么现象, 要比上面对殆周期解的分析困难, 将在第 Ⅶ 章说明它.

Ⅳ.4. 较一般的系统

对于前面各节的结果的第一个有意义的改动, 是考虑参数 ε 以不同于 (3.1) 的方式出现在系统中.

考虑系统

$$\varepsilon\dot{x}=A(t)x, \tag{4.1}$$

这里 $\varepsilon>0$ 是实参数, 而 A 属于 $\mathscr{P}_T$. 一般地说, 几乎不可能对矩阵 A 确定必要充分条件, 以保证对于某个区间 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 的所有 ε 而言, 系统 (4.1) 对于 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$、$\mathscr{AP}$ 或 $\mathscr{P}_T$ 三类之一是非临界的. 另一方面, 如果 A 是常矩阵, 下述结果正确.

引理 4.1. 如果 A 是常矩阵, 而 $\varepsilon_0>0$ 是给定的, 则当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时系统 (4.1) 对于 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$ (或 $\mathscr{AP}$) (或 $\mathscr{P}_T$) 是非临界的, 当且仅当 A 的特征值的实部都不是零.

证明 由于 A/ε 的特征值是 A 的特征值的 $1/\varepsilon$ 倍, 从引理 1 显然推出关于 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$ 或 $\mathscr{AP}$ 的结论. 此外根据引理 1,

(4.1)对于 $\mathscr{P}_T$ 是非临界的，当且仅当 $\det[I-\exp((A/\varepsilon)T)]\neq 0$，即当且仅当对于 A 的所有特征值 λ，$\lambda T/\varepsilon\neq 2k\pi i, k=0,\pm1,\cdots$。如果对所有 λ 有 $Re\lambda\neq 0$，则上面这个关系是满足的. 如果有一个 $\lambda=i\omega$，ω 是实数，则这关系成为 $\varepsilon\neq\omega T/2k\pi, k=0,\pm1,\cdots$. 对于一个区域 $[0,\varepsilon_0]$ 中的所有 ε，这些关系显然不可能完全满足. 引理证毕.

引理 4.2. 如果 A 是常矩阵，$\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$、$\mathscr{AP}$ 或 $\mathscr{P}_T$ 三类之一，又当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时，系统(4.1)对于 $\mathscr{D}$ 是非临界的，则系统

$$\varepsilon\dot{x}=Ax+f(t),\quad f\in\mathscr{D} \tag{4.2}$$

在 $\mathscr{D}$ 内有唯一解 $\mathscr{K}_\varepsilon f(0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$，这个 $\mathscr{K}_\varepsilon:\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ 是一个连续线性映射，并且有 $K>0$（与 ε 无关）使得当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时，$|\mathscr{K}_\varepsilon f|\leqslant K|f|$.

证明 由假设与引理 4.1 推知 A 的特征值的实部不是零，如果 $\tau=\varepsilon t, y(\tau)=x(\tau/\varepsilon), g(\tau)=f(\tau/\varepsilon)$，而 x 是(4.2)的解，则

$$\frac{dy}{d\tau}=Ay+g(\tau).$$

这里 $g\in\mathscr{B}(-\infty,\infty)$，由定理 1.1 推知存在唯一的 $\mathscr{K}g\in\mathscr{B}(-\infty,\infty)$，它满足此方程，并且 $|\mathscr{K}g|\leqslant K|g|$. 由于 $|g|=|f|$，得知 $\mathscr{K}_\varepsilon f\overset{\text{def}}{=\!=}\mathscr{K}g$ 满足引理的性质.

习题4.1. 在假设 A 的特征值都是负实部(正实部)的情况下，讨论 $\varepsilon\to 0$ 时(4.2)的解趋于方程 $Ax+f(t)=0$ 的解的方式. 如果 A 的特征值既有正实部的又有负实部的，将发生什么现象？

从引理 4.2 和与在定理 2.1 及 3.1 中相同的证明方法，可把这些定理的结果直接引伸到系统

$$\varepsilon\dot{x}=Ax+f(t,x,\varepsilon), \tag{4.3}$$

这里 f 满足与这些定理中所叙述的条件相同的条件。

为了以后参考，详细地叙述这个结果．假设 A 的特征值的实部不是零，令 π_+、π_-为射影算子，它们把 C^n 分别映到 A 的正实部特征值，负实部特征值所对应的不变子空间，又设 K,α 是正的常数，使得

$$
\begin{aligned}
|e^{At}\pi_- x| &\leqslant K e^{-\alpha t}, \quad t\geqslant 0, \\
|e^{At}\pi_+ x| &\leqslant K e^{\alpha t}, \quad t\leqslant 0.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

对于$(-\infty,\infty)$内任意的 σ，令 $x(t,\sigma,x^\sigma,\varepsilon)$记(4.3)的满足 $x(\sigma,\sigma,x^\sigma,\varepsilon)=x^\sigma$ 的解，又对于任意 $\delta>0$ 与任意函数 $\phi:R\to C^n$，令

$$
\begin{aligned}
&(a)\ S(\phi,\sigma,\delta,\varepsilon)=\{x=x^\sigma-\phi(\sigma)\in C^n:|\pi_-[x^\sigma-\phi(\sigma)]| \\
&\qquad <\frac{\delta}{2K},|x(t,\sigma,x^\sigma,\varepsilon)-\phi(t)|<\delta,t\geqslant\sigma\}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&(b)\ U(\phi,\sigma,\delta,\varepsilon)=\{x=x^\sigma-\phi(\sigma)\in C^n:|\pi_+[x^\sigma-\phi(\sigma)]| \\
&\qquad <\frac{\delta}{2K},|x(t,\sigma,x^\sigma,\varepsilon)-\phi(t)|<\delta,t\leqslant\sigma\}.
\end{aligned}
$$

换句话说，$S(\phi,\sigma,\delta,\varepsilon)$是(4.3)的这些解在 σ 的初始值的集合，它们的 π_- 射影在 $\pi_-\phi(\sigma)$的 $\delta/2K$ 邻域内，对于所有 $t\geqslant\sigma$，这些解留在曲线 $\phi(t)$的 δ 邻域内．对于 π_+ 与 $t\leqslant\sigma$，可以相似地陈述 $U(\phi,\sigma,\delta,\varepsilon)$．如果用 B^n_ρ 记集合$\{x\in C^n:|x|<\rho\}$，则下述命题成立．

定理 4.1．假设$\mathscr{D}$是 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$, $\mathscr{A}\mathscr{P}$ 或 $\mathscr{P}_T$ 三类之一．如果 f 在$\mathscr{D}\cap\mathscr{L}ip(\eta,M)$内，而 A 的特征值的实部不是零，则存在 $\delta>0,\varepsilon_1>0,\beta>0$ 与这样的函数 $x^*(t,\varepsilon)$，它在$-\infty<t<\infty$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$上连续，$x^*(t,0)=0$，$x^*(\cdot,\varepsilon)$在$\mathscr{D}$内，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时 $|x^*(\cdot,\varepsilon)|<\delta$，使得 $x^*(t,\varepsilon)$是(4.3)的解，并且是(4.3) 仅有的在$\mathscr{D}$内模$<\delta$的解．如果 $\mathscr{D}=\mathscr{A}\mathscr{P}$，则 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时 $m[x^*(\cdot,\varepsilon)]\subset m[f]$．

此外，映射 π_- 是由 $S(x^*(\cdot,\varepsilon),\sigma,\delta,\varepsilon)$到$(\pi_-C^n)\cap B^n_{\delta/2K}$ 的同胚，当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时，对于任意$x^\sigma-x^*(\sigma,\varepsilon)\in S(x^*(\cdot,\varepsilon),\sigma,\delta,\varepsilon)$，

有

$$|x(t,\sigma,x^\sigma,\varepsilon)-x^*(t,\varepsilon)|\leqslant 2K|\pi_-[x^\sigma-x^*(\sigma,\varepsilon)]|e^{-\beta(t-\sigma)},$$
$$t\geqslant\sigma. \tag{4.6}$$

映射 π_+ 是由 $U(x^*(\cdot,\varepsilon),\sigma,\delta,\varepsilon)$ 到 $(\pi_+C^n)\cap B^n_{\delta/2K}$ 的同胚，当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时，对于任意 $x^\sigma-x^*(\sigma,\varepsilon)\in U(x^*(\cdot,\varepsilon),\sigma,\delta,\varepsilon)$，有

$$|x(t,\sigma,x^\sigma,\varepsilon)-x^*(t,\varepsilon)|\leqslant 2K|\pi_+[x^\sigma-x^*(\sigma,\varepsilon)]|e^{\beta(t-\sigma)},$$
$$t\leqslant\sigma. \tag{4.7}$$

$x^*(\cdot,\ \varepsilon)$ 的稳定流形与不稳定流形对于 σ 的依赖性恰与定理 3.1 中所陈述的一样.

上述定理的证明中与定理 2.1 和 3.1 的证明仅有一点不相同即结论是在闭区间 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 上而不是在区间 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 上作出的. 对于区间 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$，证明与前面相同，而从证明本身可以观察出 $\varepsilon\to0$ 时 $x^*(\cdot,\varepsilon)\to0$. 如果我们定义 $x^*(\cdot,0)=0$，显然它将是 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 上的连续函数.

引理 4.3. 如果 A 是常矩阵，又 $\varepsilon_0>0$ 是给定的，则系统

$$\dot{x}=\varepsilon Ax \tag{4.8}$$

当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时对于 $\mathscr{B}(-\infty,\ \infty)$ 或 $\mathscr{A}\mathscr{P}$ 是非临界的，当且仅当 A 的特征值的实部不是零. 存在 $\varepsilon_0>0$，使得系统(4.8)当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时对于 $\mathscr{P}_T$ 是非临界的，当且仅当 $\det A\neq0$.

证明 第一部分乃是重述引理 1. 此外，从引理 1 推知(4.8)对 $\mathscr{P}_T$ 是非临界的，当且仅当对于所有 $k=0,\pm1,\cdots$ 及所有使得 $\lambda=i\omega$ 是 A 的一个特征值的 ω 有 $\varepsilon\omega T\neq2k\pi$. 如果 $\omega=0$ 不是 A 的特征值，总存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时此不等式被满足. 如果 $\omega=0$ 是特征值，决不会有这样的 ε_0，这就证明了引理.

习题 4.2. 对于$[0,\infty)$中的什么 ε 值，系统(4.8) 对于 $\mathscr{P}_T$ 是非临界的？ 对于哪些复数 ε，系统(4.8)对于 $\mathscr{P}_T$ 是非临界的？

引理 4.4. 如果 A 是常矩阵，$\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$、$\mathscr{A}\mathscr{P}$ 或 $\mathscr{P}_T$

三类之一，又当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时系统(4.8)对于$\mathscr{D}$是非临界的，则系统

$$\dot{x}=\varepsilon(Ax+f(t)),\quad f\in\mathscr{D} \tag{4.9}$$

当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时在$\mathscr{D}$内有唯一解 $\mathscr{K}_\varepsilon f$，这个 $\mathscr{K}_\varepsilon:\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ 是连续线性映射，而且存在 $K>0$(与 ε 无关)使得当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时，$|\mathscr{K}_\varepsilon f|\leqslant K|f|$。

又如果 f 在 $\mathscr{AP}$(或 $\mathscr{P}_T$)内，$\int^t f$ 在 $\mathscr{AP}$ (或 $\mathscr{P}_T$) 内，则当 $\varepsilon\to0$ 时 $|\mathscr{K}_\varepsilon f|\to0$.

证明 由于假定(4.8)对于$\mathscr{D}$是非临界的，定理 1.1 蕴涵着 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时连续线性算子 $\mathscr{K}_\varepsilon$ 的存在性。当$\mathscr{D}$是$\mathscr{B}(-\infty,\infty)$或 $\mathscr{AP}$ 时，引理中说到的K的存在性恰如引理 4.2 的证明中那样来验证。如果 $\mathscr{D}=\mathscr{P}_T$，对于特殊情况(4.9)，公式(1.9)产生$\mathscr{K}_\varepsilon$如下

$$(\mathscr{K}_\varepsilon f)(t)=\int_0^T\varepsilon[e^{-\varepsilon AT}-I]^{-1}e^{-As}f(t+s)ds,\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0. \tag{4.10}$$

由于$[e^{-\varepsilon AT}-I]^{-1}$是满足 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 的 ε 的连续函数，故$\mathscr{K}_\varepsilon f$ 当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时连续。现在我们说明由(4.10)定义的$\mathscr{K}_\varepsilon f$ 当 $\varepsilon\to0$ 时有极限。由于系统(4.8)对于 $\mathscr{P}_T$ 是非临界的，引理 4.3 意味着 A 是非奇异矩阵。此外，$\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\varepsilon[e^{-\varepsilon AT}-I]^{-1}=-(AT)^{-1}$。这表明$\mathscr{K}_\varepsilon$在$(0,\varepsilon_0]$上一致有界，于是证明了引理的第一部分.

为了证明引理的后一部分，令$x=y+\varepsilon\int^t f$，y 将满足方程

$$\dot{y}=A\varepsilon\left(y+\varepsilon A\int^t f\right).$$

把引理的第一部分应用到这个方程，可说明当 $\varepsilon\to0$ 时 $\mathscr{AP}$(或 $\mathscr{P}_T$)内的唯一解趋于零，引理就证明了.

对于 $f\in\mathscr{AP}$，$\int^t f$在$\mathscr{AP}$内这一条件等价于说 f 的积分有界，

特别又意味着

$$M[f]\overset{\text{def}}{=\!=}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds=0. \tag{4.11}$$

在第Ⅴ章中，我们将说明为作出与引理 4.4 的后一部分相同的结论，(4.11)已是足够的了.

习题 4.3. 讨论(4.9)的解趋于方程 $\dot{x}=0$ 的解的方式. 在殆周期或周期的情况下，对于为什么$\int f$ 有界时 (4.9) 的所有解趋于 $\dot{x}=0$ 的零解，你能说出除开引理4.4 所讨论的以外的任何理由吗？

从引理 4.2 和与定理 2.1 及 3.1 中相同的证明方法，可把这些定理的结果直接引伸到系统

$$\dot{x}=\varepsilon(Ax+f(t,x,\varepsilon)), \tag{4.12}$$

这里 f 满足与这些定理中所叙述的相同的条件.

这个结果是下一章中介绍的平均法的基础，为了以后考虑时用，因此详细地叙述它，算子 π_+,π_-，常数 K,α 与集合 $S(\phi,\sigma,\delta,\varepsilon)$，$U(\phi,\sigma,\delta,\varepsilon)$，都假定与(4.4)和(4.5)中给出的相同.

定理 4.2. 假设$\mathscr{D}$是 $\mathscr{B}(-\infty,\infty)$，$\mathscr{AP}$或$\mathscr{P}_T$三类之一，又当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时，系统(4.8)对于$\mathscr{D}$是非临界的. 如果 f 在$\mathscr{D}\cap\mathscr{L}ip(\eta,M)$内，则存在 $\delta>0$，$\varepsilon_1>0$，$\beta>0$ 与一个这样的函数 $x^*(t,\varepsilon)$，它是 t,ε 的当$-\infty<t<\infty,0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时的连续函数，$x^*(t,0)=0$，$x^*(\cdot,\varepsilon)$在$\mathscr{D}$内，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时$|x^*(\cdot,\varepsilon)|<\delta$，使得 $x^*(t,\varepsilon)$是 (4.12)的解，并且是(4.12)仅有的在$\mathscr{D}$内范数$<\delta$ 的解. 如果 $\mathscr{D}=\mathscr{AP}$，则 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时 $m[x^*(\cdot,\varepsilon)]\subset m[f]$.

此外，如果 A 的特征值的实部都不是零，则映射 π_- 是由 $S(x^*(\cdot,\varepsilon),\sigma,\delta,\varepsilon)$到$(\pi_-C^n)\cap B^n_{\delta/2K}$ 的同胚，当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时，对于所有 $x^\sigma-x^*(\sigma,\varepsilon)\in S(x^*(\cdot,\varepsilon),\sigma,\delta,\varepsilon)$，有

$$|x(t,\sigma,x^\sigma,\varepsilon)-x^*(t,\varepsilon)|\leqslant 2K|\pi_-[x^\sigma-x^*(\sigma,\varepsilon)]|e^{-\beta(t-\sigma)},$$
$$t\geqslant\sigma, \tag{4.13}$$

映射 π_+ 是由$U(x^*(\cdot,\varepsilon),\sigma,\delta,\varepsilon)$到$(\pi_+C^n)\cap B^n_{\delta/2K}$ 的同胚，当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时，对于所有 $x^\sigma-x^*(\sigma,\varepsilon)\in U(x^*(\cdot,\varepsilon),\sigma,\delta,\varepsilon)$，有

$$|x(t,\sigma,x^\sigma,\varepsilon)-x^*(t,\varepsilon)|\leqslant 2K|\pi_+[x^\sigma-x^*(\sigma,\varepsilon)]|e^{\beta(t-\sigma)},$$
$$t\leqslant\sigma. \tag{4.14}$$

$x^*(\cdot,\ \varepsilon)$的稳定流形与不稳定流形对于σ的依赖性恰与定理3.1中所陈述的一样。

利用引理 4.4 后面的说明，容易看出在系统

$$\dot{x}=\varepsilon(Ax+h(t)+f(t,x,\varepsilon)) \tag{4.15}$$

是周期或殆周期的情况下，只要$M[h]=0$ 与$\int^t h$有界，定理 4.2 的结论仍然正确，还容易把定理 4.2 引伸到 $f=f(t,x,\varepsilon,\mu)$的情形，这里的向量 $\varepsilon'=(\varepsilon,\mu)$甚小。

习题 4.4. 考虑方程

$$\dot{x}=Ax+h(\omega t)+f(\omega t,x,\varepsilon), \tag{4.16}$$

这里ω是大参数，A的特征值的实部是负的，h 在$\mathscr{P}_T$ 内，$\int_0^T h(s)ds=0$，而 f 在 $\mathscr{P}_T\cap\mathscr{L}ip(\eta,M)$内。假设定理 4.2 当 f 依赖于多于一个的小参数时正确，试证明存在 $\omega_1>0$，$\varepsilon_1>0$，使得(4.16)在 $\mathscr{P}_{T/\omega}$ 内有一个渐近稳定的周期解 $x^*(\cdot,\omega,\varepsilon)$，这里$\omega\geqslant\omega_1$，$0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$，又当 $\omega\to\infty$，$\varepsilon\to0$ 时，$x^*(\cdot,\omega,\varepsilon)\to0$。特别地，请考虑强迫 van der Pol 方程

$$\dot{x}_1=x_2,$$
$$\dot{x}_2=-x_1+k(1-x_1^2)x_2+\varepsilon g(\omega t),$$

这里 $k\neq0$，g 在$\mathscr{P}_T$内而$\int^t g(s)ds$有界。

利用引理 1、4.2 与 4.4 和定理 2.1 的证明方法，对于上述各类型系统的耦合系统，可以证明下述一般结果。

定理 4.3. 假设$\mathscr{D}$是$\mathscr{B}(-\infty,\infty)$，$\mathscr{A}\mathscr{P}$或 $\mathscr{P}_T$ 三类之一，u 是

n 维向量，又 $u=(x,y,z)$，这里的 x,y,z 分别是 n_1,n_2,n_3 维向量，$f=f(t,u,\varepsilon)=(X,Y,Z)$ 在 $\mathscr{D}\cap\mathscr{L}ip(\eta,M)$ 内，$\varepsilon=(\mu,\nu)$，μ 是实的纯量，B 是 $\mathscr{D}_T$ 内的 $n_2\times n_2$ 矩阵，而 A、C 分别是 $n_1\times n_1$，$n_3\times n_3$ 矩阵，使得系统

$$\dot{x}=\mu Ax,\quad \dot{y}=B(t)y,\quad \mu\dot{z}=Cz \tag{4.17}$$

当 $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时对于 $\mathscr{D}$ 是非临界的．则存在常数 $\rho_1>0$、$\mu_1>0$、$\nu_1>0$ 与这样的函数 $u^*(t,\varepsilon)$，它当 $-\infty<t<\infty$、$0<\mu\leqslant\mu_1$、$0\leqslant|\nu|\leqslant\nu_1$ 时是 t、ε 的连续函数，$u^*(t,0)=0$，$u^*(\cdot,\varepsilon)$ 在 $\mathscr{D}$ 内，$|u^*(\cdot,\varepsilon)|<\rho_1$，使得 $u^*(t,\varepsilon)$ 是方程

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\mu[Ax+X(t,x,y,z,\varepsilon)],\\ \dot{y}&=B(t)y+Y(t,x,y,z,\varepsilon),\\ \mu\dot{z}&=Cz+Z(t,x,y,z,\varepsilon)\end{aligned} \tag{4.18}$$

的解，而且是(4.18)仅有的在 $\mathscr{D}$ 内范数 $<\rho_1$ 的解．如果 $\mathscr{D}=\mathscr{A}\mathscr{D}$，则 $0<\mu\leqslant\mu_1$，$0\leqslant|\nu|\leqslant\nu_1$ 时 $m[u^*(\cdot,\varepsilon)]\subset m[f,B]$．

(4.18)的解 $u^*(\cdot,\varepsilon)$ 的稳定性质用与第 3 节恰好相同的方式讨论．解 $u^*(\cdot,\varepsilon)$ 的稳定流形与不稳定流形可以像定理4.1 和4.2 中那样来描写．特别地，如果 A、C 的所有特征值实部是负的，又 $\dot{y}=B(t)y$ 的所有特征指数的实部是负的，则解 $u^*(\cdot,\varepsilon)$ 指数渐近稳定．如果在 A 或 C 的特征值或 $\dot{y}=B(t)y$ 的特征指数中至少有一个是实部为正的，则解 $u^*(\cdot,\varepsilon)$ 不稳定．

如同早先所提到的，很难除去(4.18)中 A 是常矩阵这一限制．另一方面，却可容许 C 为 t 的函数，比方说 $C=C(t)$，但是要求 $C(t)$ 的特征值 $\lambda(t)$ 的实部有界，或者更一般地要求

$$C(t)=\operatorname{diag}(D(t),E(t)),$$

这里 $D(t)$ 与 $E(t)$ 的特征值的实部有界(不必同号)．关于按本节精神讨论问题的参考文献，请见 Hale[6]．

IV.5. 具有大阻尼与大强迫力的 Duffing 方程

考虑方程

$$\ddot{y}+c\dot{y}+y+\varepsilon by^3=B\cos\nu t. \tag{5.1}$$

这里 $c>0, b, \varepsilon, B$ 与 $\nu>0$ 都是常数. 它的等价系统是

$$\begin{aligned}\dot{y}&=z,\\ \dot{z}&=-y-cz-\varepsilon by^3+B\cos\nu t.\end{aligned} \tag{5.2}$$

将用本章的方法与关于二次型的某些初等事实来证明，存在 $r_0>0$ 使得对于任意 $r\geqslant r_0$，存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(r)>0$，使得系统 (5.2) 在中心为零点半径等于 r 的圆盘 B_r^2 内有唯一的周期是 $2\pi/\nu$ 的周期解. 这个解是一致渐近稳定的，而(5.2)的任意初始值在 B_r^2 内的解当 $t\to\infty$ 时必定趋于这个周期解.

考虑线性非齐次系统

$$\begin{aligned}\dot{y}&=z,\\ \dot{z}&=-y-cz+B\cos\nu t.\end{aligned} \tag{5.3}$$

由于齐次方程

$$\begin{aligned}\dot{y}&=z,\\ \dot{z}&=-y-cz\end{aligned} \tag{5.4}$$

的系数矩阵的特征值的实部是负的，定理 1.1 意味着(5.3)有周期为 $2\pi/\nu$ 的唯一解. 如果用 $y^0(t)$，$z^0(t)$ 来记这个解，则把变换 $y=y^0(t)+u, z=z^0(t)+v$ 用到(5.2)，得到等价系统

$$\begin{aligned}\dot{u}&=v+\varepsilon f_1(t,u,v),\\ \dot{v}&=-u-cv+\varepsilon f_2(t,u,v),\end{aligned} \tag{5.5}$$

这里 f_1, f_2 是 t 的周期为 $2\pi/\nu$ 的周期函数，对 t, u, v 连续，对 u, v 连续可微. 实际上应是 $f_1\equiv0, f_2=-b(y_0(t)+u)^3$，但为了符号方便，却考虑比较一般的系统(5.5).

由于 $c>0$，由定理 2.1 推知有 $\rho_1>0$ 与 $\varepsilon_1>0$，使得当 $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$ 时，系统(5.5)在圆盘 $B_{\rho_1}^2$ 内有唯一的周期为 $2\pi/\nu$ 的周期解

$(u^*(t,\varepsilon), v^*(t,\varepsilon))$; 这个周期解是一致渐近稳定的, 并且$u^*(t,0) = 0 = v^*(t,0)$. 为了对 (5.2) 证明上面提到过的结论, 只要说明对于任意两个圆盘 B_r^2 和 $B_{r_1}^2$ $(r_1 < r)$, 可能找到 $\varepsilon_2 > 0$, 使得(5.5)的初始值在 B_r^2 内的任意解终将进入并且留在圆盘 $B_{r_1}^2$ 内. 事实上, 假设 r_0 是这样的, 使(5.2)的由 $y^*(t,\varepsilon) = y^0(t) + u^*(t,\varepsilon)$, $z^*(t,\varepsilon) = z^0(t) + v^*(t,\varepsilon)$ 给出的周期解$(y^*(t,\varepsilon), z^*(t,\varepsilon))$当 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi/\nu$ 与$|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1$ 时落在 $B_{r_0}^2$ 内, 取 $r_1 < \rho_1$. 对于任意 $r \geqslant r_0$, 选取 $\varepsilon_0(r) = \min(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$, 就给出了所要的结果.

现在我们证明关于(5.5)的断言. 由于线性系统(5.4)是渐近稳定的, 直观上显然应有一族围绕原点的椭圆, 使得(5.4)的解在时间增大的过程中从这些椭圆的外部穿过边界到达内部. 如果情况如此, 则对于任意给定的椭圆, 可以选取这么小的 ε, 使得(5.5)的解沿着与线性系统(5.4)相同方向穿过椭圆的边界. 现在实际作出这族椭圆, 来把这些想法精确化.

考虑二次型

$$V(u,v) = \frac{c^2+2}{c}u^2 + 2uv + \frac{2}{c}v^2. \tag{5.6}$$

这个二次型是正定的, 而且这个函数的水平曲线是中心在原点的椭圆. V 的沿着(5.5)的解的导数是

$$\dot{V}(u,v) = -2(u^2+v^2) + 2\varepsilon\left[\frac{c^2+2}{c}uf_1 + uf_2 + vf_1 + \frac{2}{c}vf_2\right]. \tag{5.7}$$

对于任意正的 r、r_1 $(r < r_1)$, 选取正的常数$c_1 > c_2$, 使得包含在曲线 $V(u,v) = c_1$ 与 $V(u,v) = c_2$ 之间的区域U包含在圆盘 B_r^2、$B_{r_1}^2$的边界之间的区域 (见图 5.1). 假设u, v分布在集合 $V(u,v) = c_2$上

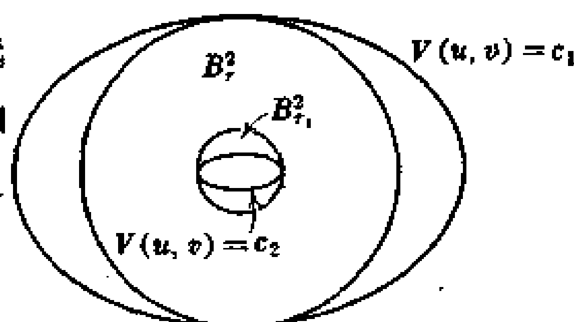


图 17.5.1

时 $\min(u^2+v^2)=\alpha$. 则 $\alpha>0$, 而且可以找到 $\varepsilon_2>0$, 使得对于 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_2$, $-\infty<t<\infty$及所有U中的(u,v), (5.7) 的右边小于 $-\alpha/2$. 对于U中任意的(u^0,v^0), (5.5)的满足 $u(0)=u^0$, $v(0)=v^0$ 的解 $u(t)$, $v(t)$留在椭圆 $V(u,v)=c_1$ 的内部, 并且满足

$$V(u(t),v(t))\leqslant V(u(0),v(0))+\int_0^t \dot{V}(u(s),v(s))ds$$

$$\leqslant V(u(0),v(0))-\frac{\alpha}{2}t.$$

由于V在U内是正的, 又解不可能到达椭圆 $V(u,v)=c_1$, 必定有 $t_0>0$, 使得 $V(u(t),v(t))$对所有 $t\geqslant t_0$ 留在椭圆 $V(u,v)=c_2$ 的内部. 这就证明了结果.

第V章　简单振动现象与平均法

在第Ⅱ章里，说明怎样用 Poincaré-Bendixson 理论来确定二维自治系统周期轨道的存在性与稳定性质．对于高维系统甚至二维非自治系统，第Ⅱ章的方法在讨论周期解或殆周期解的存在性中没有助益．

在第Ⅳ章里，对于由任意阶线性系统经过扰动得到的微分方程系统，讨论了周期解与殆周期解的存在性．另一方面，假定了平凡解是线性系统仅有的属于所希望的解类的解；也就是说，系统是非临界的．但在应用中经常遇到系统的线性部分含有非平凡周期解与系统对于某类强迫函数是临界的情形．第Ⅳ章的方法不能直接应用到这些问题．然而，可能有适当的变量变换把临界系统引到第Ⅳ章的框架内．这正是在下面第3节讨论的平均法的基础．平均法是确定含有小参数的非线性向量微分方程类的周期与殆周期解的存在性与稳定性的充分条件的一般方法．不援引第Ⅳ章的结果也可以讨论周期解的存在性．事实上，在第Ⅷ章对周期情形给出很一般的理论．

在讨论平均法之前，在第1与2节中论述保守系统与简单的非保守系统的一般性质．本章余下的各节介绍具体的应用．

V.1. 保守系统

假设 $f:R^n\to R^n$ 连续，又对于 R^n 中任意的 x_0，系统

$$\dot{x}=f(x) \tag{1.1}$$

有唯一取 $x(0,x_0)=x_0$ 的解 $x(t)=x(t,x_0)$．如果函数 $E:D\subset R^n\to R$ 及其一阶偏导数连续，在 D 内任意开集上 E 不是常数，又沿着

(1.1)的解有 $E(x(t))=$常数，则说E是在区域 $D\subset R^n$ 上(1.1)的积分. 由于假定E有连续的一阶导数，这最后一个性质等价于 $[\partial E(x(t))/\partial x]f(x(t))=0$. 如果系统(1.1)在 R^n 上有积分E，就说它是保守系统. 因此保守系统在 R^n 内的轨道必落在积分 E 的水平曲线上.

假设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，E 是(1.1)在D上的一个积分，D内的x^0使得 $\partial E(x^0)/\partial x_n\neq 0$. 令 $c=E(x^0)$. 根据隐函数定理，从方程 $E(x)=c$ 可把 x_n 解出为 $x_k(k<n)$ 与 x^0 的函数 x_n^*，这里 x 在 x^0的充分小邻域U内. 由于假定了E是一个积分，如果$x(t)$是(1.1)的 $x(0)=x^0$ 的解，则 $E(x(t))=c$. 把 x_n^* 代入(1.1)，导出确定(1.1)的通过 x^0 的解的 $n-1$ 个方程. 因此(1.1)的维数在U上减少了一. 特别当 $n=2$ 时，积分的存在把解方程简化为计算积分.

下面，使用在第Ⅰ章介绍的记号，令 $\gamma^+=\gamma^+(x)$、$\gamma^-=\gamma^-(x)$ 分别记(1.1)通过 x 的正、负轨道，$\omega(\gamma^+)$、$\omega(\gamma^-)$分别记轨道 γ^+的 ω 极限集与 γ^- 的 α 极限集.

引理 1.1. 假设E是(1.1)的在包含(1.1)的一个平衡点 x^0 的开集 D上的一个积分. 则不存在 x^0 的邻域 U，对于U内所有的 x，x^0 属于集合 $\omega(\gamma^+(x))$或 $\alpha(\gamma^-(x))$之一.

证明 如果存在序列$\{t_n\}$(当 $n\to\infty$时 $t_n\to\infty$)与D内的 x^1，使得 $n\to\infty$时 $x(t_n,\ x^1)\to x^0$，则由E的连续性推知对于所有 t，$E(x(t,x^1))=E(x^0)$. 对于 $t_n\to-\infty$的情形，相同的结论也正确因此，如果有 x^0 的邻域U使得对于U内所有 x，x^0 属于集合 $\omega(\gamma^+(x))$或 $\alpha(\gamma^-(x))$ 之一，则E在U上将是常数. 由于这与积分的定义矛盾，引理就证明了.

引理 1.1 特别地意味着保守系统的平衡点不可能渐近稳定或完全不稳定.

引理 1.2. 假设E是(1.1)在(1.1)的平衡点 $x=0$ 的有界，开

邻域D内的一个积分. 如果$E(0)=0$, 且对于D内的$x\neq 0$有$E(x)>0$, 则$x=0$是一个稳定平衡点.

证明 如果$E(0)=0$, 且对于D内的$x\neq 0$有$E(x)>0$, 则对于任意$\varepsilon>0$, $\alpha \overset{\text{def}}{=} \min\limits_{\substack{|x|=\varepsilon \\ x在D内}} E(x)>0$. 取$0<\delta<\varepsilon$使得集合$\{x: |x|\leqslant \delta\}\subset D$, $\max\limits_{|x|\leqslant\delta} E(x)<\alpha$. 由于$E$是一个积分, 这意味着如果$|x^0|<\delta$, $t\geqslant 0$时便有$|x(t, x^0)|<\varepsilon$. 于是$x=0$稳定, 这就证明了引理.

引理 1.3. 当$n=2$时, 在保守系统的稳定的孤立平衡点的邻域内所有的轨道必定是周期轨道, 而平衡点必是中心.

证明 在这个证明过程中, 在集合上加一横表示集合的闭包. 假设$x=0$是$n=2$的(1.1)的一个孤立的稳定平衡点. 则存在零点的邻域U与V, 使得$\bar{V}\setminus\{0\}$没有平衡点, 又对于U内每个x, 通过x的正轨道$\gamma^+=\gamma^+(x)$属于$\bar{V}$. 根据Poincaré-Bendixson定理, $\gamma^+(x)$的ω极限集$\omega(\gamma^+(x))$必定是$\{0\}$或一个周期解. 引理1.1意味着对于U内每个x, $\omega(\gamma^+(x))$不可能是$\{0\}$, 如果在U内有x, 使得$\Gamma=\omega(\gamma^+(x))=\bar{\gamma}^+(x)\setminus\gamma^+(x)$是周期轨道, 则$\Gamma$是从内部或外部渐近稳定的, 因此存在一个开集, 在其上积分E是常数. 这个矛盾表明任何不趋于零的轨道必是周期轨道. 由于每个周期轨道显然包含零点在其内部, 这就证明了引理.

很重要的一类保守系统是n个自由度的Hamilton系统. 如果$q=(q_1, \cdots, q_n)$是n个质点的广义位置坐标, $p=(p_1, \cdots, p_n)$是广义动量, T是动能, V是位能, $H(p, q)=T(p)+V(q)$, 则运动方程是

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{1.2}$$

这是(1.1)当$x=(p, q)$的特殊情形. Hamilton函数$H(p, q)$是系统(1.2)的一个积分. 经常假定动能$T(p)$当$p\neq 0$时取正值, $T(0)$

$=0, \partial T(0)/\partial p=0$. 因此，如果 $p\neq 0$ 时 $\partial T(p)/\partial p\neq 0$，则 $V(q)$ 的极值点 q^0 给出(1.2)的平衡点 $(0, q^0)$.

对于 Hamilton 系统，我们可以证明

引理 1.4. 假设 $H(p, q)$ 对 p, q 解析，$q=0$ 是位能 $V(q)$ 的极值点，$V(0)=0$. 如果零点是 $V(q)$ 的局部绝对极小值点，则 $(0, 0)$ 是(1.2)的稳定平衡点. 如果 $T(p)=T_2(p)+T_3(p), V(q)=V_k(q)+V_{k+1}(q)$，其中 T_2 是正定二次型，V_k 是 $k(\geqslant 2)$ 次齐次多项式，又当 $|p|, |q|\to 0$ 时，$T_3(p)=o(|p|^2)$，$V_{k+1}(q)=o(|q|^k)$，则若零点不是 $V(q)$ 的极小值点，平衡点 $(0, 0)$ 必是不稳定的.

证明 关于稳定性的断言是引理 1.2 的直接结论. 假设零点不是 $V(q)$ 的极小值点. 令 $W(p, q)=p'q, H=T+V$. 对于 $(0, 0)$ 的任意邻域 U，令 $\Omega_U=\{(p, q)\in U: W(p, q)>0, H(p, q)<0\}$. 由于 $H(0, q)=V(q)$ 及 V 在 $q=0$ 不取极小值，故 Ω_U 不是空集. 还有，$(0, 0)$ 是 Ω_U 的边界点. 利用 H 是(1.2)的一个积分这个事实，容易看出 $W(p, q)$ 沿着(1.2)的解的导数是

$$\dot{W}(p, q)=2T_2(p)-kV_k(q)+\cdots,$$

这里…记当 $|p|$、$|q|\to 0$ 时是 $o(|p|^2)$ 与 $o(|q|^k)$ 的项. 在 Ω_U 内，由 $T_2(p)>0$ 及 $H(p, q)<0$ 推知 $V_k(q)<0$. 并且，可以把 $(0, 0)$ 的邻域 U 选得充分小，以致在 Ω_U 内 $\dot{W}(p, q)>0$. 由于在 Ω_U 内，$W(p, q)>0, \dot{W}(p, q)>0$，又在 U 内部的 Ω_U 的边界由使得 $W(p, q)=0, H(p, q)=0$ 的点组成，因此初始值在 Ω_U 内的任意解必通过 U 的边界离开邻域 Ω_U. 由于 $(0, 0)$ 在 Ω_U 的边界内，这证明了不稳定性与引理.

对于二阶保守系统，可以举出关于积分曲线特性的较具体的知识. 考虑二阶纯量方程

$$\ddot{u}+g(u)=0, \tag{1.3}$$

或等价系统

$$\begin{aligned}\dot{u}&=v,\\ \dot{v}&=-g(u),\end{aligned}\tag{1.4}$$

其中 g 连续，又唯一性定理对(1.4)成立. 系统(1.4)是一个 Hamilton 系统，其 Hamilton 函数或总能量是 $E(u,v)=v^2/2+G(u)$，这里 $G(u)=\int_0^u g(s)ds$. (1.4)在(u, v)平面内的轨道必落在函数 $E(u,v)$的水平曲线上；也就是说，在由 $E(u,v)=h$(常数)描述的曲线上. (1.4)的平衡点是点$(u^0,0)$，这里 $g(u^0)=0$. 如果 $G(u)$在 u^0 取绝对极小值，则$(u^0,0)$稳定(引理 1.2)，而在$(u^0,0)$的某邻域内的所有轨道必是周期轨道(引理 1.3)；即$(u^0, 0)$是一个中心. 由于 $E(u,v)=h$(常数)的解是

$$v=\pm\sqrt{2[h-G(u)]},\tag{1.5}$$

可推知对任何一个不是 G 的极小值点的u^0，孤立平衡点$(u^0,0)$必定不稳定. 事实上，曲线 $v=+\sqrt{2[h-G(u)]}$ 与 $v=-\sqrt{2[h-G(u)]}$ 是实直线在$(u^0, 0)$邻域内的线段的同胚象. 如果由这些曲线出发的解不离开$(u^0, 0)$的邻域，则解曲线的 ω 极限集将是一个平衡点. 由于假定了$(u^0, 0)$是孤立的，这直接引出了矛盾.

如果在 u^0 的邻域里，当 $u<u^0$ 时 $g(u)<0$，$u>u^0$ 时 $g(u)>0$，则点 u^0 是 $G(u)$ 的局部绝对极小值点. 倒转过来的不等式适用于 $G(u)$的局部绝对极大值点. 如果 $G(u)$在 u^0取局部绝对极大值，则平衡点$(u^0,0)$在下述意义之下是鞍点，即所有当 $t\geqslant0$ ($t\leqslant0$)时停留在$(u^0, 0)$的小邻域里的解的集合必位于通过 $(u^0, 0)$的一段弧上. 这个事实直接从公式(1.5)推出. 因此我们可以陈述.

引理 1.5. 如果 $G(u)$仅有的极值点是局部绝对极小值点与局部绝对极大值点，则(1.4)的稳定平衡点是中心，而所有的不稳定平衡点是鞍点.

下面这些特别的例子说明关于二维保守系统的知识是如何地

不用任何计算就容易地得到. E 的水平曲线的草图容易用(1.5)推出.

例 1.1. 假设函数 $G(u)$ 的图形如图 1.1a 所示,其中 A, B, C, D 是 G 的极值点. 解曲线的轨道草图在图 1.1b 中,所有曲线自然是对称于 u 轴的. 与 A, B, C, D 相对应的平衡点在相平面内也标示为 A, B, C, D. 点 A, C 是中心,B 是鞍点,而 D 像鞍点与中心的结合. 联结 B 到 B 和 D 到 D 的曲线都叫作分界线. 分界线是由(1.3)的轨道组成的曲线,它把平面分成两部分,并且它有一个邻域,在其中所有轨道的定性性质并不都相同. 因此,分界线必定总是通过不稳定平衡点.

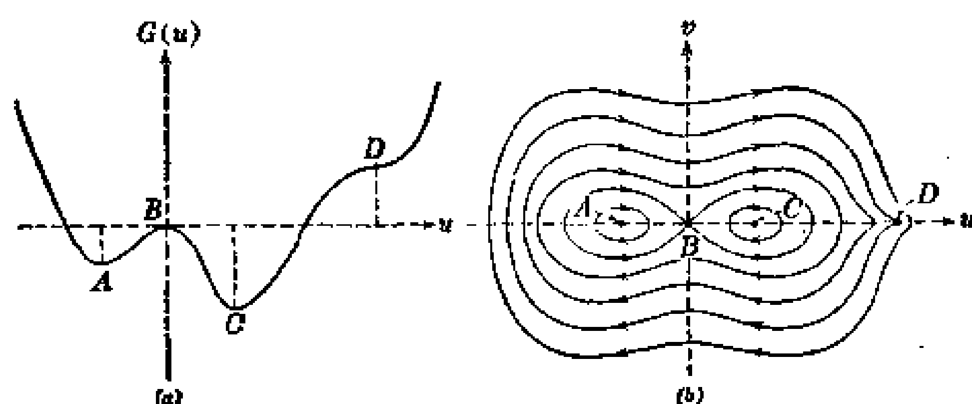


图 V.1.1

例 1.2. 假设方程(1.3)是长为 l 的单摆在真空中的运动方程, u 是单摆与铅垂线的夹角. 如果 g 是重力加速度, 则 $g(u)=k^2\sin u$, $k^2=g/l$, $G(u)=k^2(1-\cos u)$,而 $G(u)$ 图形如图 1.2a 所示. 曲线 $E(u, v)=h$ 显然有图 1.2b 所示图形. 请解释图 1.2b 中每条轨道的物理意义.

对于任意的 $g(x)$, 不难确立方程(1.3)的周期解的周期的隐式公式. 任意周期解的轨道是闭曲线,反过来也对. 从(1.5)推知一条闭轨道必交 u 轴于两点 $(a, 0)$ 与 $(b, 0)$ $(a<b)$, 并且对称于 u 轴. 如果 T 是周期解的周期,则 $T=2\omega$, 这里 ω 是通过轨道中 $v>0$

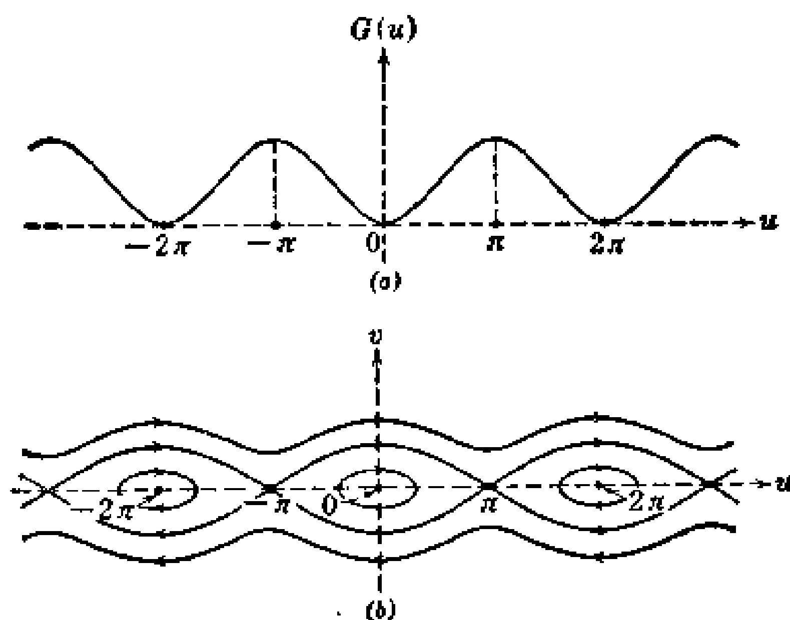


图 V.1.2

那部分的时间．由于 v 由(1.5)给出，从(1.4)推出

$$T=2\int_a^b\frac{du}{\sqrt{2(h-G(u))}}. \tag{1.6}$$

如果 $G(u)$是 u 的偶函数，又周期解围绕原点，则对称性蕴涵着 $a=-b$，且

$$T=4\int_0^b\frac{du}{\sqrt{2(h-G(u))}}. \tag{1.7}$$

对于例1.2.的单摆方程，$g(u)=k^2\sin u, G(u)=k^2(1-\cos u)$，而如果 $u(0)=b<\pi, v(0)=0$，则 $h=E(u(t),v(t))=E(u(0),v(0))=E(b,0)=k^2(1-\cos b)$．因此，通过这个点$(b, 0)$的周期轨道的周期$T$是

$$T=4\int_0^b\frac{du}{[2k^2(\cos u-\cos b)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{2}{k}\int_0^b\frac{du}{\left[\sin^2\left(\frac{b}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}},$$

如果 $\sin(u/2)=\sin\psi\sin(b/2)$，则

$$T=\frac{4}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\left[1-\sin^2\left(\frac{b}{2}\right)\sin^2\psi\right]^{\frac{1}{2}}},\tag{1.8}$$

这个积分不能用初等函数来计算，但是如果 b 充分小，则容易求出周期的近似值. 用级数展开，我们得知如果 b 充分小，

$$T=\frac{2\pi}{k}\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{b}{2}\right)+\cdots\right]$$
$$=\frac{2\pi}{k}\left[1+\frac{1}{16}b^2+\cdots\right].$$

一次近似 $T=2\pi/k$，即频率 k 近似为 $\sqrt{g/l}$，这差不多是每本初等力学第一课的内容. 从这个例子与上面的计算，可看出自治微分方程的周期解的周期从一个解到另一个解可能改变(把这个事实与线性系统对照).

习题 1.1. 对于 $g(u)=u+\gamma_0u^3$，证明由公式(1.7)给出的周期 $T(b,\gamma_0)$ 当 $\gamma_0>0$ $(\gamma_0<0)$ 时是 b 的增加(下降)函数. 前一种情况叫作硬弹簧，后一种情况叫作软弹簧. 硬蕴含着频率随振幅 b 增大的意思. 软蕴含着频率随振幅 b 减小的意思.

在一般情况下，如果 $(u^0,0)$ 是(1.3)的稳定平衡点，则当在 $(u^0,0)$ 的邻域内周期解的频率是从 $(u^0,0)$ 到周期轨道的距离的增加(下降)函数时，恢复力 $g(u)$ 叫作对应于在 u^0 的硬弹簧(软弹簧).

例 1.3. 考虑一个被约束在以角速度 ω 围绕铅垂直线旋转的平面内振动的质量为 m 长度为 l 的单摆. 如果 u 记单摆从铅垂直线的角偏离(见图 1.3). 离心力矩是 $m\omega^2l^2\sin u\cos u$，重力矩是 $mgl\sin u$，又惯性矩是 $I=ml^2$. 运动的微分方程是

$$I\ddot{u}-m\omega^2l^2\sin u\cos u+mgl\sin u=0\tag{1.9}$$

如果 $\mu=m\omega^2l^2/I$ 与 $\lambda=g/\omega^2l$，则这个方程等价于系统

$$\dot{u}=v,$$

$$\dot{v}=\mu(\cos u-\lambda)\sin u. \tag{1.10}$$

它是(1.4)的特殊情形，$g(u)=g(u,\lambda)=-\mu(\cos u-\lambda)\sin u$. 由于(1.10)的平衡点的个数依赖于$\lambda$，故需强调$g$对于$\lambda$的依赖性. (1.10)的平衡点是点$(u^0,0)$，这里$g(u^0,\lambda)=0$，它们画在图1.4中. 阴影区域对应于$g(u,\lambda)<0$. 对于任意给定的$\lambda$，平衡点是$(0,0)$，$(\pi,0)$与$(\cos^{-1}\lambda,0)$，这最后一个自然当$|\lambda|<1$时才出现. 当$|\lambda|\neq1$时，从引理1.5推知在图1.4中标以黑点(圈)的曲线上的点是稳定的(不稳定的)，稳定点是中心，不稳定点是鞍点. 从这个图可见当$0<\lambda<1$时，稳定平衡点不是$(0,0)$或$(\pi,0)$，而是$(\cos^{-1}\lambda,0)$. 从物理上说，如果角速度ω足够大，就可以有$\lambda<1$. 请分析$\lambda=1$与$\lambda=-1$时平衡点的性态.

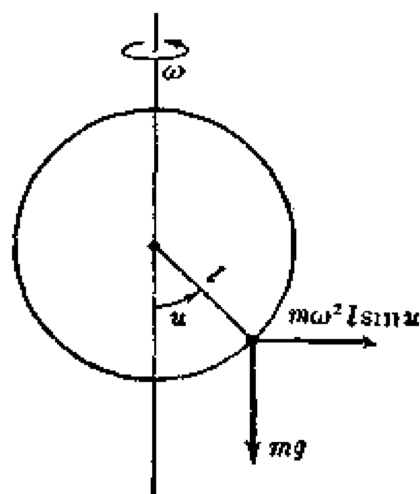


图 Ⅴ.1.3

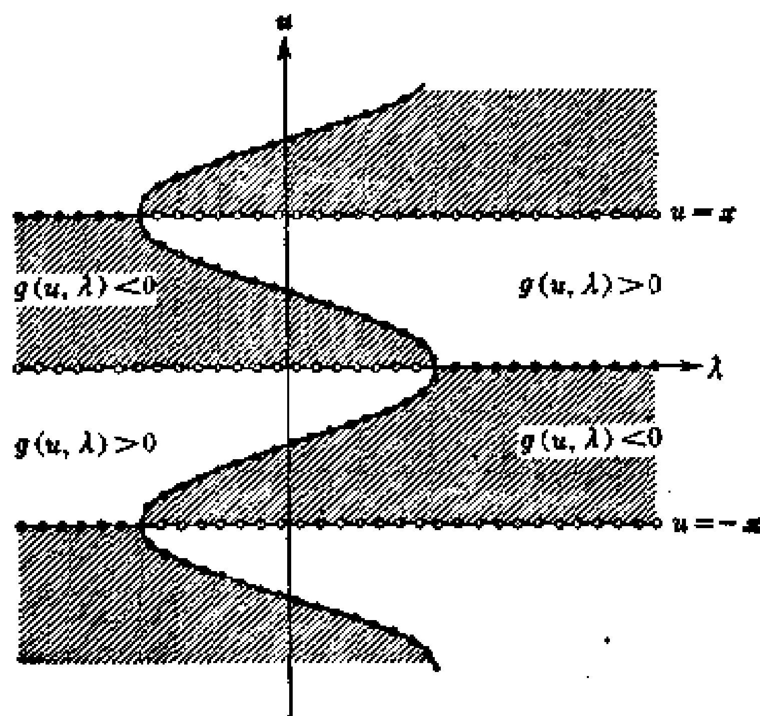


图 Ⅴ.1.4

易见这个系统有一个积分是

$$E(u,v)=\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{2}\sin^2u-\mu\lambda\cos u.$$

假设 $0<\lambda<1$. 平衡点$(0,0)$与$(0,\pi)$都是鞍点，而通过这些点的水平曲线分别是

$$v^2=\mu[\sin^2u+2\lambda(\cos u-1)],$$

$$v^2=\mu[\sin^2u+2\lambda(\cos u+1)].$$

这两条曲线都把点$(\cos^{-1}\lambda,0)$包含在内部，后一个还通过$(-\pi,0)$. 图 1.5 给出了轨道的草图. 两个中心对应着 $\cos u=\lambda$的两个u值. 请解释图 1.5 中所有轨道的物理意义，并画出 $\lambda>1$ 时在相平面内轨道的草图.

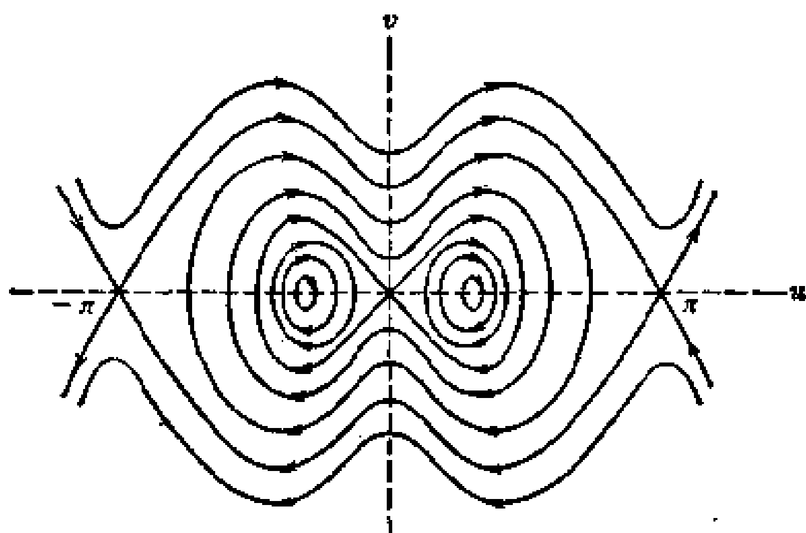


图 V.1.5

V.2. 非保守的二阶方程——极限环

直到现在，已经讨论了三种不同类型的振动，它们都出现在二阶实自治微分系统中. 对于线性系统来说，当且仅当系数矩阵的元素取很特殊的值时它有周期解，并且在这种情况下，所有的解是周期恰好相同的周期函数. 二阶保守系统一般是有周期解的. 这

些周期解作为由初始条件唯一确定的解族的成员而出现．一般来说周期随初始条件而变化，但是并非所有解都必是周期解．在I.7节中，介绍了一个人为的二阶系统的例子，它有一个孤立周期解，除开平衡解以外的所有解当 $t\to\infty$ 时都趋向它．在第Ⅱ章中，作为 Poincaré-Bendixson 理论的一个应用，指出了对于包括 van der Pol 方程作为特例的一大类二阶系统，同样的情况也出现．这种孤立的渐近稳定周期轨道叫作极限环，有时也叫作自持振动．由于周期运动在下述意义之下由微分方程本身确定，即微分方程确定了一个平面区域，在其中任意正轨道的 ω 极限集是周期解，因之这种系统呈现的现象完全不同于保守系统．

由于在这种系统中解的定性性态对于微分方程中的扰动来说不及保守系统灵敏，因此在许多应用中，这种系统比较重要．为了说明当保守系统受到小扰动时解的结构如何改变，考虑寻常单摆受到正比例于与铅垂方向的夹角 u 的变化率的摩擦力的问题．运动方程是

$$\ddot{u}+\beta\dot{u}+k^2\sin u=0, \tag{2.1}$$

这里 $\beta>0$ 是常数，等价系统是

$$\begin{aligned}\dot{u}&=v,\\ \dot{v}&=-k^2\sin u-\beta v.\end{aligned} \tag{2.2}$$

如果 $E(u,v)=v^2/2+k^2(1-\cos u)$ 是系统的能量，则沿着(2.2)的解 $dE/dt=-\beta v^2\leqslant 0$．

我们首先指出对于(2.2)的所有解有 $v(t)\to 0$．由于 $dE/dt\leqslant 0$，沿着(2.2)的解 E 是非增的，而 $v(t)$ 是有界的．方程(2.2)与 $\sin u(t)$ 的有界性意味着 $\dot{v}(t)$ 有界．如果当 $t\to\infty$ 时 $v(t)$ 不趋于零，则存在正数 ε，δ 与序列 t_n，$n=1, 2, \cdots(n\to\infty$ 时 $t_n\to\infty)$，使得各个区间 $I_n=[t_n-\delta, t_n+\delta]$ 不相重叠并且对 $t\in I_n$，$n=1,2,\cdots$ 有 $v^2(t)>\varepsilon$．令 $p(t)$ 为这样的整数，当 $n\leqslant p(t)$ 时 $t_n<t$．则

$$E(u(t),v(t))-E(u(0),v(0))=\int_0^t\left(\frac{dE}{dt}\right)ds$$
$$\leqslant-\int_0^t\beta v^2(s)ds$$
$$\leqslant-2\beta\delta ep(t).$$

由于 $t\to\infty$ 时 $p(t)\to\infty$，而 $E(u(t),v(t))$有界，这就与 $t\to\infty$ 时 $v(t)$不趋于零的事实矛盾. 故 $t\to\infty$ 时 $v(t)\to0$.

由于 $E(u(t),v(t))$非增与 $t\to\infty$ 时$v(t)\to0$, E的水平曲线的性质意味着(2.2)的每个解有界. 此外，由于能量是非增的而且下有界，当 $t\to\infty$ 时它必趋于一个常数. 由于E连续，并且任意解的极限集是不变量，极限集必定位在E的一条水平曲线上；即每个解的极限集必有 $\dot{E}=0$, 因之 $v=0$. 由于每个解的极限集是不变量，而且必定有 $v=0$, 推知 u 是 0、$\pm\pi$、$\pm2\pi$ 等. (2.2)的所有解有界，这意味着它们有非空的极限集. 因之(2.2)的每个解必趋于平衡点$(0,0)$、$(\pi,0)$、$(-\pi,0)$等之一. 为了理解解的定性性质，剩下来只要讨论平衡点的稳定性质和利用画在图 1.2b 中的 $E(u,v)$的水平曲线的性质便行了.

相对于$(0,0)$的线性变分方程是

$$\dot{u}=v,$$
$$\dot{v}=-k^2u-\beta v,$$

它的系数矩阵的特征值实部都是负的. 因此由 Liapunov 定理(定理 Ⅲ.2.4)，知非线性系统的原点是渐近稳定的. 相对于平衡点$(\pi,0)$的线性变分方程是

$$\dot{u}=v,$$
$$\dot{v}=k^2u-\beta v,$$

它的系数矩阵的特征值是实数，一个正一个负. 回忆起鞍点性质(定理 Ⅲ.6.1)，知道这个平衡点是不稳定的，并且只有两条轨道当

$t\to\infty$ 时趋于这个点. 利用 $\sin u$ 的周期性可以得到另外的平衡点的稳定性质.

从这个事实与 $E(u,v)$ 的水平曲线的特性, 可以在相平面内画出近似轨道的草图. 对于 $\beta<2k$ 的情况, 这些轨道如图2.1所示.

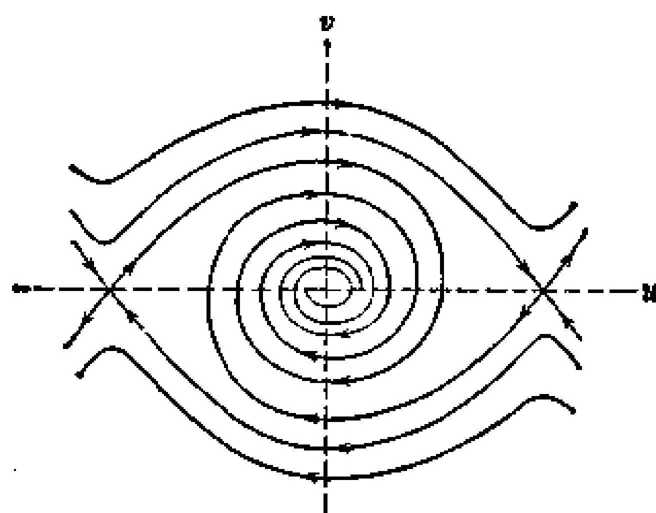


图 Ⅴ.2.1

这个例子非常清楚地说明, 在保守系统的微分方程中引进一个小的非保守项, 解的相图的定性性质有惊人的改变. 它也表明, 在引进真正的损耗项或摩擦项以后, 极限环将不出现. 在这个情况中, 总是从系统取出能量. 为了在一个方程中得到极限环, 在系统与外力之间必须有能量的错综的转移. 这正好是 van der Pol 方程的性质, 在它那里损耗项 $\phi\dot{u}$中的 ϕ 依赖于 u 而且符号不是固定的.

一个自由度的自治系统非线性振动理论的基本问题是确定微分方程有极限环的条件, 确定极限环的个数与确定极限环的近似特征(周期, 振幅, 形状). 在二维情况, Ⅱ.1 节的 Poincaré-Bendixson 理论是一个有用的工具. 另外的一些重要方法都涉及扰动技巧, 但是可以证明它们一般只可用于方程包含或大或小的参数的情形. 这些方法的最大方便处是系统的维数无关紧要, 而方

程可以按照复杂的方式明显地依赖于时间.

在下节将说明一种普通的扰动技巧，它叫作平均法. 作为这个理论的一个启发，考虑 van der Pol 方程

$$\ddot{u}-\varepsilon(1-u^2)\dot{u}+u=0, \tag{2.3}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是小参数. 从定理 Ⅱ.1.6 知道这个方程对于每个 $\varepsilon>0$ 有唯一极限环. 我们的直接目的是近似地确定 $\varepsilon\to 0$ 时这个周期解的振幅与周期. 方程(2.3)等价于系统

$$\begin{aligned}\dot{u}&=v,\\ \dot{v}&=-u+\varepsilon(1-u^2)v.\end{aligned} \tag{2.4}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，(2.4)的通解是

$$\begin{aligned}u&=r\cos\theta,\\ v&=-r\sin\theta.\end{aligned} \tag{2.5}$$

这里 $\theta=t+\phi$, ϕ 与 r 是任意常数. 如果(2.4)的周期解是 ε 的连续函数，则这个解的轨道应该靠近在(2.5)中令 $r=$常数且让 θ 由 0 变到 2π 所描出的某个圆. 第一个基本问题是确定 r 的哪个常数值对于 $\varepsilon\neq 0$ 的(2.4)产生周期解最合适.

如果 r,θ 是新坐标，则(2.4)变换成系统

$$\begin{aligned}&(a)\quad \dot{\theta}=1+\varepsilon(1-r^2\cos^2\theta)\sin\theta\cos\theta,\\ &(b)\quad \dot{r}=\varepsilon(1-r^2\cos^2\theta)r\sin^2\theta.\end{aligned} \tag{2.6}$$

对于一个紧集中的 r，可取甚小的 ε，使得 $1+\varepsilon(1-r^2\cos^2\theta)>0$，而(2.6)描述的解的轨道由纯量方程

$$\frac{dr}{d\theta}=\varepsilon g(r,\theta,\varepsilon) \tag{2.7}$$

的解给出，这里

$$g(r,\theta,\varepsilon)=\frac{(1-r^2\cos^2\theta)r\sin^2\theta}{1+\varepsilon(1-r^2\cos^2\theta)\sin\theta\cos\theta}. \tag{2.8}$$

确定 ε 甚小时 van der Pol 方程的周期解的问题等价于求(2.7)的对 θ 周期为2π 的周期解$r^*(\theta,\varepsilon)$. 事实上，如果$r^*(\theta,\varepsilon)$是

(2.7)的这样一个以 2π 为周期的解，而$\theta^*(t,\varepsilon)$是方程

$$\dot{\theta}=1+\varepsilon(1-[r^*(\theta,\varepsilon)]^2\cos^2\theta)\sin\theta\cos\theta \tag{2.9}$$

的满足 $\theta^*(0,\varepsilon)=0$ 的解，则

$$u(t)=r^*(\theta^*(t,\varepsilon),\varepsilon)\cos\theta^*(t,\varepsilon),$$

$$v(t)=-r^*(\theta^*(t,\varepsilon),\varepsilon)\sin\theta^*(t,\varepsilon)$$

是(2.4)的解. 令 T 为方程 $\theta^*(T,\varepsilon)=2\pi$ 的唯一解. 于是由方程(2.9)的解的唯一性推知，对所有 t 有$\theta^*(t+T,\varepsilon)=\theta^*(t,\varepsilon)+2\pi$. 因此对所有 t，有 $u(t+T)=u(t)$，$v(t+T)=v(t)$，故 u、v 是(2.4)的周期为T的周期解. 反过来，如果 u、v 是(2.4)的周期为T 的周期解，则 $r(t+T)=r(t)$，而可以选取 θ 使得对所有 t，$\theta(t+T)=\theta(t)+2\pi$. 函数 r 与 θ 满足 (2.6)，又对于甚小的 ε，t 可以表示成为 θ 的函数，以求得 r 作为 θ 的周期为 2π 的函数. 显然，这个函数满足(2.7).

让我们尝试确定(2.7)的形如

$$r=\rho+\varepsilon r^{(1)}(\theta,\rho)+\varepsilon^2 r^{(2)}(\theta,\rho)+\cdots \tag{2.10}$$

的一个解，这里要求每个 $r^{(j)}(\theta,\rho)$对 θ 是周期为 2π 的，而 ρ 是常数. 如果把这个表示式代入(2.7)，令 ε 的同次幂相等，则有

$$\frac{\partial r^{(1)}(\theta,\rho)}{\partial\theta}=g(\rho,\theta,0).$$

这个方程将有对 θ 以 2π 为周期的解，当且仅当 $\int_0^{2\pi} g(\rho,\ \theta,\ 0)d\theta=0$. 如果这个表示式不是零，则称之为长期项. 如果出现了长期项，则不可能对于任何常数 ρ 都有形如(2.10)的解. 常数 ρ 必须取得至少要满足方程$\int_0^{2\pi} g(\rho,\ \theta,\ 0)d\theta=0$. 在已确定了满足这个关系(如果可能)的 ρ 以后，接着可以计算 $r^{(1)}(\theta,\ \rho)$，又可以进行确定 $r^{(2)}(\theta,\rho)$等. 然而，对于 $r^{(2)}(\theta,\ \rho)$等也得到相同类型的方程，可能出现更多长期项. 克服这个困难的一个途径是利用 Poin-

caré 提出的一种方法，它的要点是：把 r 展开成形如(2.10)的级数，又把 ρ 展开成 ε 的形如

$$\rho=\rho_0+\varepsilon\rho_1+\varepsilon^2\rho_2+\cdots$$

的级数，再利用与前面相同的程序逐次确定 $\rho_0,\rho_1,\rho_2,\cdots$以便消去所有的长期项. 如果可以选定所有的 ρ_j，就求得(2.7)的一个周期解. 在后面的一章里将在比较一般的提法下讨论这个方法.

我们稍为详细地讨论由 Krylov 与 Bogoliubov 提出的另一种方法，并在下一节中加以推广. 把(2.10)看成化 r 为 ρ 的变量变换，并且试图确定 $r^{(1)}(\theta,\ \rho)$，$r^{(2)}\ (\theta,\ \rho)\cdots$与函数 $R^{(1)}(\rho)$，$R^{(2)}(\rho),\cdots$，使 ρ 的微分方程是自治的，并且由

$$\frac{d\rho}{d\theta}=\varepsilon R^{(1)}(\rho)+\varepsilon^2R^{(2)}(\rho)+\cdots \tag{2.11}$$

给出. 如果能找到这样一个变换，则(2.7)的周期为 2π 的解重合于(2.11)的平衡点. 此外，(2.7)的解的暂态特性将可以从(2.11)求得.

如果把(2.10)代入(2.7)，要求 ρ 满足(2.11)，又设

$$g(r,\theta,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k g^{(k)}(r,\theta),$$

则
$$R^{(1)}(\rho)+\frac{\partial r^{(1)}(\theta,\rho)}{\partial\theta}=g^{(0)}(\rho,\theta),$$

$$\begin{aligned}R^{(2)}(\rho)+\frac{\partial r^{(2)}(\theta,\rho)}{\partial\theta}&=-\frac{\partial r^{(1)}(\theta,\rho)}{\partial\rho}R^{(1)}(\rho)\\&\quad+g^{(1)}(\rho,\theta)+\frac{\partial g^{(0)}(\rho,\theta)}{\partial r}r^{(1)}(\theta,\rho).\end{aligned} \tag{2.12}$$

由于 $g^{(0)}(\rho,\theta)=g(\rho,\theta,0)$，(2.12)的第一个方程总有由

$$\begin{aligned}R^{(1)}(\rho)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\theta,\rho,0)d\theta,\\r^{(1)}(\theta,\rho)&=\int[g(\rho,\theta,0)-R^{(1)}(\rho)]d\theta\end{aligned} \tag{2.13}$$

表出的解，这里"$\int$"记平均值等于零的那个函数的原函数，它以 2π 为周期. 相似地，从(2.12)的第二个方程可以解出 $R^{(2)}(\rho)$ 作为右边项的平均值，而 $r^{(2)}(\theta,\rho)$ 由与 $r^{(1)}(\theta,\rho)$ 相同的方式定义. 当 ε 充分小时，这个过程的确收敛，但是这里将不进行这种研讨.

让我们扼要地重述在一次近似中发生了什么事情. 假设 $R^{(1)}(\rho)$, $r^{(1)}(\theta,\rho)$ 由(2.13)定义，又考虑把恰当的变量变换

$$r=\rho+\varepsilon r^{(1)}(\theta,\rho) \tag{2.14}$$

用到(2.7). 对于小的 ε, ρ 的方程是

$$\left(1+\varepsilon\frac{\partial r^{(1)}}{\partial\rho}\right)\dot{\rho}=\varepsilon[g(\rho+\varepsilon r^{(1)},\theta,\varepsilon)-g(\rho,\theta,0)+R^{(1)}(\rho)],$$

于是

$$\dot{\rho}=\varepsilon R^{(1)}(\rho)+\varepsilon^2R^{(2)}(\rho,\theta,\varepsilon), \tag{2.15}$$

这里 $R^{(2)}(\rho,\theta,\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 连续. 因此，变换(2.14)把(2.7)化为自治方程

$$\dot{\rho}=\varepsilon R^{(1)}(\rho) \tag{2.16}$$

的高阶扰动，这里 $R^{(1)}(\rho)$ 是 $g(\rho,\theta,0)$ 的平均值.

假设对于某个 ρ^0, $R^{(1)}(\rho^0)=0$, $dR^{(1)}(\rho^0)/d\rho<0$. 则 ρ^0 是(2.16)的稳定平衡点，而方程(2.15)满足定理 IV.4.3 的条件，其中 $x=\rho$, 关于 y 与 z 的方程不存在. 因此，(2.15)有渐近稳定的以 2π 为周期的解，于是由(2.15)给出了(2.7)的一个渐近稳定的以 2π 为周期的解.

如果把这些应用到 van der Pol 方程，这时 g 由(2.8)给出，则

$$R^{(1)}(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\rho,\theta,0)d\theta=\frac{\rho}{2}\left(1-\frac{\rho^2}{4}\right).$$

这个函数 $R^{(1)}(\rho)$ 使得 $R^{(1)}(2)=0$, $dR^{(1)}(2)/d\rho=-1<0$. 因此，van der Pol 方程有一个渐近稳定的周期解，当 $\varepsilon=0$ 时它是 $u=2\cos t$. 零也是解，它使 $R^{(1)}(0)=0$ 与 $dR^{(1)}(0)/d\rho=0$. 引用定理 IV.4.3，得知零对应于(2.3)的不稳定平衡点 $u=0$.

V.3. 平均

确定包含小参数的非线性微分方程的周期解与殆周期解的一种最重要的方法是所谓平均法. 在上一节里，由试图确定在什么条件下可以作一个时变的变量变换把一个非自治微分方程化到一个自治微分方程，启示了这种方法. 在这一节里将进一步发展这个想法，但是我们主要的兴趣将在于只取一次近似就能得到的那些知识.

假设 x 在 C^n 内, $\varepsilon\geqslant 0$ 是一个实参数, $f: R\times C^n\times[0, \infty)\to C^n$ 连续, 对于每个固定的 ε, $f(t, x, \varepsilon)$是相对于紧集内的 x 而言一致的 t 的殆周期函数, $f(t, x, \varepsilon)$对 x 的一阶偏导数是连续的. 与方程系统

$$\dot{x}=\varepsilon f(t, x, \varepsilon) \tag{3.1}$$

的同时, 考虑"平均"系统

$$\dot{x}=\varepsilon f_0(x), \tag{3.2}$$

这里

$$f_0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t, x, 0)dt. \tag{3.3}$$

平均法的基本问题是确定在什么意义下自治系统(3.2)解的性态近似于比较复杂的非自治系统的解的性态. 有两类自然的解释给出"近似"的内涵. 一是要求近似在大的有限区间上成立，而另一是要求近似在无限区间上成立. 这里给出的结果仅处理无限时间区间的情形.

方程 $\dot{x}=0$ 的每个解是常数. 因此，系统(3.1)是相对于不管怎样的周期的周期函数类或者特别是相对于殆周期函数类是临界的系统的扰动方程. 另一方面，下面将指出存在一个殆周期的变量变换, 它把 $x\to y$ 并把系统(3.1)变为形如

$$\dot{y}=\varepsilon[f_0(y)+f_1(\varepsilon, t, y)]$$

的系统，这里 $f_1(0, t, y)=0$. 如果存在 y_0 使得 $f_0(y_0)=0$, 又 $y=y_0+z$, 则这个系统可以写成

$$\dot{z}=\varepsilon\left[\frac{\partial f_0(y_0)}{\partial y}z+\left\{f_0(y_0+z)-f_0(y_0)-\frac{\partial f_0(y_0)}{\partial y}z\right\}\right.$$
$$\left.+f_1(\varepsilon, t, y_0+z)\right].$$

因此，如果线性系统

$$\dot{z}=\varepsilon\frac{\partial f_0(y_0)}{\partial y}z$$

相对于被考虑的函数类是非临界的，则在 y_0 的邻域内可以应用第Ⅳ章的方法. 沿着这个途径，我们得到(3.1)的周期解与殆周期解的存在性与稳定性的充分条件. 上面这种推理是平均法的基本想法. 在本章剩下的部分里，我们假定 C^n 中的范数是欧氏范数.

下面是理论中的基本引理.

引理 3.1. 假设 $g: R\times C^n\to C^n$ 连续，$g(t, x)$ 是相对于紧集内的 x 而言一致的 t 的殆周期函数，它对 x 的一阶偏导数连续，又 $g(t, x)$ 对 t 的平均值是零；即

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g(t, x)dt=0. \tag{3.4}$$

则对于任意 $\varepsilon>0$, 存在函数 $u(t, x, \varepsilon)$, 它在 $R\times C^n\times(0, \infty)$ 上对 (t, x, ε) 连续，对于固定的 ε 与紧集中的 x 而言一致地是 t 的殆周期函数，对 t 有连续的导数，对 x 有任意指定了的阶数的导数，使得如果

$$h(t, x, \varepsilon)=\frac{\partial u(t, x, \varepsilon)}{\partial t}-g(t, x),$$

则当 $\varepsilon\to 0$ 时，函数 h、$\partial h/\partial x$、εu、$\varepsilon\partial u/\partial x$ 相对于 R 中的 t 与紧集中的 x 一致地趋于零.

这个引理的证明在附录引理 5 中，当函数 $g(t, x)$ 具备某些附

加的性质时，在这里讨论引理 3.1 的意义是有好处的。假设 $g(t,x)$ 是有限三角多项式，其系数为 x 的整函数。则

$$g(t,x)=\sum_{1\leqslant k\leqslant N} a_k(x)e^{i\lambda_k t},\quad \lambda_k\neq 0. \tag{3.5}$$

这里 λ_k 是实数，每个 $a_k(x)$ 是 x 的整函数。如果

$$u(t,x)=\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{a_k(x)}{i\lambda_k}e^{i\lambda_k t}, \tag{3.6}$$

则 u 满足引理中陈述的所有条件。此外，u 不依赖于 ε，并且

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-g(t,x)=0. \tag{3.7}$$

在很多应用中，刚才指出的方式就是构造一个具有引理中叙述的性质的函数 u 的方法。对于一般的函数 g，即使 g 的平均值是零而(3.7)仍可能解不出来。事实上，有殆周期函数 $g(t)$(见附录)满足 $M[g]=0$，但 $\int^t g$ 是无界函数。上面这个引理说明，甚至在这样的情况下，可以用殆周期函数 $u(t,x,t)$"近似地"解(3.7)。自然，当 $\varepsilon\to 0$ 时 $u(t,x,\varepsilon)$ 将成为无界的，但是当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\varepsilon u(t,x,\varepsilon)\to 0$。

引理 3.2. 假设 f 满足在方程(3.1)之前叙述的性质，f_0 由(3.3)定义，而 Ω 是 C^n 内的任意紧集。则存在一个 $\varepsilon_0>0$ 与一个这样的函数 $u(t,x,\varepsilon)$，它对于 $R\times C^n\times(0,\varepsilon_0]$ 内的 (t,x,ε) 连续，对于固定的 ε 与紧集中的 x 而言一致地是 t 的殆周期函数，并满足引理 3.1 的结论，这里 $g(t,x)=f(t,x,0)-f_0(x)$，使得把变量变换

$$x=y+\varepsilon u(t,y,\varepsilon),\quad (t,y,\varepsilon)\in R\times\Omega\times[0,\varepsilon_0] \tag{3.8}$$

用到(3.1)便得到方程

$$\dot{y}=\varepsilon f_0(y)+\varepsilon F(t,y,\varepsilon), \tag{3.9}$$

这里 $F(t,y,\varepsilon)$ 当 $(t,y,\varepsilon)\in R\times\Omega\times[0,\varepsilon_0]$ 时满足与 $f(t,y,\varepsilon)$ 相同的条件，此外，$F(t,y,0)\equiv 0$。

证明 如果 $g(t,x)=f(t,x,0)-f_0(x)$，则引理3.1的条件满足. 设$u(t,x,\varepsilon)$是那个引理中给出的$u(t,x,\varepsilon)$. 由于当 $\varepsilon\to0$ 时, 对于R中的t与紧集中的y一致地有 $\varepsilon u(t,y,\varepsilon)$, $\varepsilon\partial u(t,y,\varepsilon)/\partial y$, $f(t,y,0)-f_0(y)-\partial u(t,y,\varepsilon)/\partial t\to0$, 我们在 $\varepsilon=0$ 定义 $\varepsilon u(t,y,\varepsilon)$, $\varepsilon\partial u(t,y,\varepsilon)/\partial y$, $f(t,y,0)-f_0(y)-\partial u(t,y,\varepsilon)/\partial y$ 为零. 对于任意 $\varepsilon_1>0$, 设 Ω_1 是 C^n 中包含集合

$$\{x:x=y+\varepsilon u(t,y,\varepsilon),\ (t,y,\varepsilon)\in R\times\Omega\times[0,\varepsilon_1]\}$$

的一个紧集. 选取 $\varepsilon_2>0$ 使得 $(t,y,\varepsilon)\in R\times\Omega\times[0,\varepsilon_2]$ 时 $I+\varepsilon\partial u(t,y,\varepsilon)/\partial y$ 有有界的逆. 这意味着(3.8)对于每个$(t,x,\varepsilon)\in R\times\Omega_1\times[0,\varepsilon_2]$, 至多有一个解$y\in\Omega$. 对于任意$x_0\in\Omega_1$, 由隐函数定理推知存在 $\varepsilon_3(x_0)>0$, 使得(3.8)有唯一解 $y=y(t,x,\varepsilon)$, 它对于 $|y-x_0|\leqslant\varepsilon_3(x_0)$, $|x-x_0|\leqslant\varepsilon_3(x_0)$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_3(x_0)$有定义而且连续. 由于 Ω_1 是紧集, 我们可以选取一个不依赖于 x_0 的 $\varepsilon_4>0$, 使得用 ε_4 代替 $\varepsilon_3(x_0)$时, 相同的性质成立. 如果 $\varepsilon_0=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_4)$, 则(3.8)的确定义了一个同胚. 因此, 变换(3.8)当 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $y\in\Omega$, $t\in R$ 时是意义明确的. 如果 $x=y+\varepsilon u(t,y,\varepsilon)$, 则

$$\left(I+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right)\dot{y}=\varepsilon f_0(y)+\varepsilon\left[f(t,y,0)-f_0(y)-\frac{\partial u}{\partial t}\right]$$
$$+\varepsilon[f(t,y+\varepsilon u,\varepsilon)-f(t,y,0)].$$

从引理 3.1 中 u 的性质与 f 的连续性, 直接推出对于 y 的方程所指出的性质.

从微分方程的观点来看, 引理 3.2 是最重要的, 因为它说明把 ε 甚小时几乎是恒等变换的变量变换(3.8)应用到(3.1), 便得到一个微分方程, 它与平均系统(3.2)有相同的直到包括与 ε 同阶的项. 我们再次强调, 当函数 $f(t,x,\varepsilon)$ 是系数为 x 的整函数的三角多项式时, 变换(3.8)的表示式通过取 u 如(3.6)而得到, 其中 $g(t,x)=f(t,x,0)-f_0(x)$.

设 $Re\lambda(A)$ 记矩阵 A 的特征值的实部.

定理 3.1. 假设 f 满足在(3.1)之前列出的各个条件. 如果存在 x^0 使得 $f_0(x^0)=0$, 又 $Re\lambda[\partial f_0(x^0)/\partial x]\neq 0$, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 与函数 $x^*(\cdot,\varepsilon):R\to C^n$, 它满足(3.1), 对于 $(t,\varepsilon)\in R\times[0,\varepsilon_0]$ 连续, 对于每个固定的 ε 而言是 t 的殆周期函数, $m[x^*(\cdot,\varepsilon)]\subset m[f(\cdot,x,\varepsilon)]$, $x^*(\cdot,0)=x^0$. 解 $x^*(\cdot,\varepsilon)$ 在 x^0 的邻域内也是唯一的, 并且, 如果 $Re\lambda[\partial f_0(x^0)/\partial x]<0$, 则当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时, $x^*(\cdot,\varepsilon)$ 一致渐近稳定, 而如果这个矩阵有一个特征值是正实部的, 则 $x^*(\cdot,\varepsilon)$ 不稳定.

定理 3.2. 假设 f 满足在(3.1)之前列出的各个条件, 如果对于所有 $(t,x,\varepsilon)\in R\times C^n\times[0,\infty)$, 有 $f(t+T,x,\varepsilon)=f(t,x,\varepsilon)$, 又有 x^0 使得 $f_0(x^0)=0$, $\det[\partial f_0(x^0)/\partial x]\neq 0$, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 与一个这样的函数 $x^*(t,\varepsilon)$, 它对于 $(t,\varepsilon)\in R\times[0,\varepsilon_0]$ 连续, $x^*(\cdot,0)=x^0$, 对于所有 t,ε, 有 $x^*(t+T,\varepsilon)=x^*(t,\varepsilon)$, 并且 $x^*(t,\varepsilon)$ 满足(3.1). 这个解在 x^0 的邻域内也是唯一的.

这两个定理是前面的结果的直接后果. 事实上, 在 C^n 内选取任意一个把 x^0 包含在内部的紧集 Ω. 由引理 3.2 得知我们可以假定对于 $(t,x,\varepsilon)\in R\times\Omega\times[0,\varepsilon_0]$, 方程(3.1)形如(3.9). 如果 x^0 使得 $f_0(x^0)=0$, 则在(3.9)中令 $y=x^0+z$, 得出

$$\dot{z}=\varepsilon Az+\varepsilon F(t,x^0+z,\varepsilon)+\varepsilon[f_0(x^0+z)-f_0(x^0)-Az]$$

$$\xlongequal{\text{def}}\varepsilon Az+\varepsilon q(t,z,\varepsilon),$$

这里 $A=\partial f_0(x^0)/\partial x$. 现在对于 z 的方程可以直接应用引理 IV.4.3 与定理 IV.4.2, 以完成定理 3.1 与 3.2 的证明.

在应用中, 很多问题不可能用等价于形如(3.1)的系统的运动方程描述. 然而, 定理 3.1 与 3.2 证明中的根本想法可以有效地用到比较复杂的情形. 因此, 应该记住这些基本原理, 把这里的讨

论看作着手处理弱的非线性系统中振动现象的一种可能的方法.现在要举出的另一种应用是针对一类看来在应用中常发生的方程的.

考虑系统

$$\dot{x}=\varepsilon f(t,x)+\varepsilon h(\varepsilon t,x), \tag{3.10}$$

这里 $\varepsilon>0$ 是一个实参数，当$(t,x)\in R\times C^n$ 时，$f(t,x)$与$h(t,x)$连续，并且对 x 的一阶导数连续，$f(t,x)$对于紧集中的 x 一致地是 t 的殆周期函数，又存在 $T>0$，使得对所有 t，x 有 $h(t+T,x)=h(t,x)$.

系统(3.10)包含"快"时间 t 与"慢"时间 εt. 只对快时间用平均手续，得到非自治"平均"方程

$$\dot{x}=\varepsilon f_0(x)+\varepsilon h(\varepsilon t,x)\overset{\text{def}}{=\!=}\varepsilon G(\varepsilon t,x), \tag{3.11}$$

这里

$$f_0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x)dt. \tag{3.12}$$

如果系统(3.11)有周期为 T/ε 的周期解 $x^0(\varepsilon t)$，则对于 $x^0(\varepsilon t)$的线性变分方程是

$$\frac{dy}{d\tau}=\frac{\partial G(\tau,x^0(\tau))}{\partial x}y. \tag{3.13}$$

这里 $\tau=\varepsilon t$.

下面这个结果叙述一些条件，在它们成立时，方程(3.10)有一个当 $\varepsilon\to0$ 时趋于平均方程(3.11)的周期解的殆周期解.

定理 3.3. 假设 f, h 满足在 (3.10) 之后列出的条件. 如果 $x^0(\varepsilon t)$是(3.11)的一个周期为 T/ε 的周期解，使得线性变分方程(3.13) 没有一个特征指数的实部是零，则存在 $\varepsilon_0>0$ 与一个函数 $x^*(\cdot,\varepsilon):R\to C^n$，它满足(3.10)，对于$(t,\varepsilon)\in R\times[0,\varepsilon_0]$，$x^*(t,\varepsilon)$连续，对于每个固定的 ε，$x^*(t,\varepsilon)$是 t 的殆周期函数，$m[x^*(\cdot,\varepsilon)]$

$\subset m[f(\cdot,x),h(\varepsilon\cdot,x)]$；又当 $\varepsilon\to0$ 时，在 R 上一致地有 $x^*(t,\varepsilon)-x^0(\varepsilon t)\to0$. 这个解在 $x^0(\cdot)$ 的邻域里也是唯一的. 并且，如果 (3.13) 的所有特征指数的实部是负的，则 $x^*(\cdot,\varepsilon)$ 对 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 一致渐近稳定，又如果有一个特征指数实部为正，则 $x^*(\cdot,\varepsilon)$ 不稳定.

这个结果的证明进行如下. 在 C^n 内选取任意一个包含 $x^0(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ 在内部的紧集. 如果 $g(t,x)=f(t,x)-f_0(x)$，又 $u(t,x,\varepsilon)$ 是引理 3.1 给出的函数，则同在引理 3.2 的证明中一样，有 $\varepsilon_0>0$ 使得变量变换 $x=y+\varepsilon u(t,y,\varepsilon)$ 在 $(t,y,\varepsilon)\in R\times\Omega\times[0,\varepsilon_0]$ 时意义明确. 把这个变换用到系统 (3.10)，得到等价方程

$$\dot{y}=\varepsilon G(\varepsilon t,y)+\varepsilon H(t,\varepsilon t,y,\varepsilon),$$

这里 $H(t,\tau,y,0)=0$，又 $H(t,\tau,y,\varepsilon)$ 对 y 满足与 f、h 相同的光滑性条件，对 t 是殆周期函数，对 τ 是周期为 T 的周期函数. 如果 $y(t)=x^0(\varepsilon t)+z(t)$，则

$$\dot{z}=\varepsilon A(\varepsilon t)z+\varepsilon Z(t,\varepsilon t,z,\varepsilon),$$

这里 $A(\tau)=\partial G(\tau,x^0(\tau))/\partial x$，又 $Z(t,\varepsilon t,z,\varepsilon)$ 满足定理 IV. 4.2 中的条件. 假设 $P(\tau)e^{B\tau}$ 是 (3.13) 的基本矩阵解，$P(\tau+T)=P(\tau)$，又 B 是常矩阵. 根据定理的假设，B 的特征值的实部都不等于零. 如果 $z=P(\varepsilon t)w$，则

$$\dot{w}=\varepsilon Bw+\varepsilon W(t,\varepsilon t,w,\varepsilon),$$

这里 $W(t,\varepsilon t,w,\varepsilon)$ 满足定理 IV. 4.2 的条件. 直接应用这个结果，便可完成定理 3.3 的证明.

另一类常见的方程是系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\varepsilon X(t,x,y,\varepsilon),\\ \dot{y}&=Ay+\varepsilon Y(t,x,y,\varepsilon),\end{aligned}\tag{3.14}$$

这里 ε 是实参数，x、X 是 n 维向量，y、Y 是 m 维向量，A 是 $n\times n$ 常矩阵，它的特征值的实部不是零，X、Y 在 $R\times C^n\times C^m\times[0,\infty)$ 上

连续，它们对 x, y 的一阶导数连续，对于每个固定的 ε，X、Y 是对紧集内的 x, y 一致的 t 的殆周期函数。(3.14)的“平均”方程被定义为

$$\dot{x}=\varepsilon X_0(x), \tag{3.15}$$

这里

$$X_0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t,x,0,0)dt. \tag{3.16}$$

定理3.4. 假设 X、Y 满足在(3.14)之后列出的条件. 如果有 x^0 使得 $X_0(x^0)=0$ 且 $Re\lambda(\partial X_0(x^0)/\partial x)\neq 0$，则存在 $\varepsilon_0>0$ 与分别是 n 维、m 维的向量函数 $x^*(\cdot,\varepsilon)$，$y^*(\cdot,\varepsilon)$，它们满足(3.14)，在 $R\times[0,\varepsilon_0]$ 上连续，对于每个固定的 ε，它们是 t 的殆周期函数，$x^*(\cdot,0)=x^0, y^*(\cdot,0)=0$. 这个解在 $(x^0, 0)$ 的邻域内也是唯一的. 并且，如果 $Re\lambda(\partial X_0(x^0)/\partial x)<0, Re\lambda(A)<0$，则这个解对于 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 一致渐近稳定，又如果这两个矩阵之一有一个特征值的实部是正的，这个解就不稳定.

它的证明按与前面相同的路线进行. 假设 Ω 是 C^n 内包含 x^0 在内部的紧集. 如果 $g(t,x)=X(t,x,0,0)-X_0(x)$，又 $u(t,x,\varepsilon)$ 是引理 3.1 中给出的函数. 则同在引理 3.2 的证明中一样，存在 $\varepsilon_0>0$，使得变换

$$x\to x+\varepsilon u(t,x,\varepsilon),$$
$$y\to y,$$

对于 $(t,x,y,\varepsilon)\in R\times\Omega\times C^m\times[0,\varepsilon_0]$ 是意义明确的. 把这个变换应用到(3.14)，得到等价系统

$$\dot{x}=\varepsilon X_0(x)+\varepsilon X_1(t,x,y,\varepsilon)+\varepsilon X_2(t,x,y,\varepsilon),$$
$$\dot{y}=Ay+\varepsilon Y_1(t,x,y,\varepsilon),$$

这里 $X_1(t,x,y,0)=0, X_2(t,x,0,0)=0$，而且所有的函数有与前面相同的光滑性和殆周期性. 如果作进一步的变换

$$x \to x,$$

$$y \to y/\varepsilon,$$

则方程成为

$$\dot{x} = \varepsilon X_0(x) + \varepsilon X^*(t, x, y, \varepsilon),$$

$$\dot{y} = Ay + Y^*(t, x, y, \varepsilon),$$

这里 $X^*(t, x, y, 0) = 0, Y^*(t, x, y, 0) = 0$. 如果 $x \to x^0 + x$, $y \to y$, 则把定理 IV. 4. 3(这时没有变量 z)直接应用到所得到的系统，便得到了定理 3. 4.

利用同样的证明，还可得

定理 3. 5. 如果 X、Y 满足在 (3. 14)之后列出的条件，是 t 的周期为T的函数，有 x^0 使得 $X_0(x^0) = 0$, $\det[\partial X_0(x^0)/\partial x] \neq 0$, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 与分别是 n 维、m 维的向量函数 $x^*(\cdot, \varepsilon)$、$y^*(\cdot, \varepsilon)$, 它们满足(3. 14)，在 $R \times [0, \varepsilon_0]$上连续，对 t 周期为 T, 又 $x^*(\cdot, 0) = x^0$, $y^*(\cdot, 0) = 0$. 并且，这个解在$(x^0, 0)$的邻域中也是唯一的.

定理 3. 4 对于线性系统的稳定性的一个有意义的应用是

定理 3. 6. 假设 $D = \operatorname{diag}(B, A)$, 这里$B$是 $n \times n$ 矩阵，A是 $m \times m$ 矩阵，B的所有特征值有单初等因子并且实部为零，A的所有特征值实部为负. 如果$(n+m) \times (n+m)$殆周期矩阵 Φ 被分块为 $\Phi = (\Phi_{jk})$, $j, k = 1, 2$, 这里 Φ_{11}、Φ_{22} 分别是 $n \times n$、$m \times m$ 矩阵，又如果矩阵

$$E = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-Bt} \Phi_{11}(t) e^{Bt} dt \tag{3. 17}$$

的所有特征值实部是负的，则存在一个 $\varepsilon_0 > 0$, 使得系统

$$\dot{u} = Du + \varepsilon \Phi(t) u \tag{3. 18}$$

对于 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 一致渐近稳定. 如果E有一个特征值是正实部的，则对于 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, 系统(3. 18)不稳定.

这个结果的证明进行如下. 令 $u = (x, y)$, 这里 x、y 分别是 n

维、m维向量. 矩阵 e^{Bt} 对 t 是殆周期的，因此有界线性变换

$$x \to e^{Bt}x,$$
$$y \to y$$

产生出等价系统

$$\dot{x} = \varepsilon e^{-Bt}\Phi_{11}(t)e^{Bt}x + \varepsilon e^{-Bt}\Phi_{12}(t)y,$$
$$\dot{y} = Ay + \varepsilon\Phi_{21}(t)e^{Bt}x + \varepsilon\Phi_{22}(t)y.$$

这是系统(3.14)的特殊情形，它的平均系统(3.15)是$\dot{x}=Ex$. 根据关于E的假设，这个平均系统满足定理 3.4 的假设. 从由定理3.4保证的解 $x^*(\cdot,\ \varepsilon)$、$y^*(\cdot,\ \varepsilon)$ 的唯一性，显然得知 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 时 $x^*(\cdot, \varepsilon)=0$, $y^*(\cdot, \varepsilon)=0$.

本章剩下的各节把本节的结果加以应用.

V.4. 强迫 van der Pol 方程

考虑方程

$$\dot{z}_1 = z_2,$$
$$\dot{z}_2 = -z_1 + \varepsilon(1-z_1^2)z_2 + A\sin\omega_1 t + B\sin\omega_2 t, \qquad (4.1)$$

这里 $\varepsilon>0$, $\omega_1>0$, $\omega_2>0$, A, B 是常数，对于所有满足

$$|m| + |m_1| + |m_2| \leqslant 4$$

的整数，

$$m + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \neq 0. \qquad (4.2)$$

当 $\varepsilon=0$ 时，(4.1)的通解是

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1\cos t + x_2\sin t + A_1\sin\omega_1 t + B_1\sin\omega_2 t, \\ z_2 &= -x_1\sin t + x_2\cos t + A_1\omega_1\cos\omega_1 t + B_1\omega_2\cos\omega_2 t, \end{aligned} \qquad (4.3)$$

这里 $A_1 = A(1-\omega_1^2)^{-1}$, $B_1 = B(1-\omega_2^2)^{-1}$, 而 x_1, x_2 是任意常数. 为了用上一节的结果来讨论系统(4.1)的殆周期解的存在性，把关系(4.3)作为到新坐标 x_1、x_2 的变换来考虑. 在少许直接的演算以后，得到关于 x_1, x_2 的新方程

$$\dot{x}_1 = -\varepsilon(1-z_1^2)z_2\sin t,$$
$$\dot{x}_2 = \varepsilon(1-z_1^2)z_2\cos t, \tag{4.4}$$

这里 z_1、z_2 是(4.3)中给出的复杂函数. 系统(4.4)是(3.1)的特殊情形, 在(4.4)右边的拟周期系数有基本频率 $1, \omega_1, \omega_2$.

根据频率 1、ω_1、ω_2 是否满足(4.2), (4.4)的右边对于 t 的平均将有不同类型的项. 如果满足(4.2), 则(4.4)的平均方程是

$$8\dot{x}_1 = \varepsilon x_1[2(2-A_1^2-B_1^2)-(x_1^2+x_2^2)],$$
$$8\dot{x}_2 = \varepsilon x_2[2(2-A_1^2-B_1^2)-(x_1^2+x_2^2)]. \tag{4.5}$$

方程(4.5)总有常数解 $x_1=x_2=0$, 而线性变分方程的两个特征值都是 $2(2-A_1^2-B_1^2)$. 如果 $A_1^2+B_1^2\neq 2$, 则由定理 3.1 推知(4.4)有频率为 $1, \omega_1, \omega_2$ 的殆周期解, 当 $\varepsilon=0$ 时它就是零, 并且, 当 $A_1^2+B_1^2>2$ 时它一致渐近稳定, 当 $A_1^2+B_1^2<2$ 时它不稳定. 这意味着原方程(4.1)有一个殆周期解, 它当 $A_1^2+B_1^2>(<)2$ 时一致渐近稳定(不稳定), 当 $\varepsilon=0$ 时它是

$$z_1(t) = A_1\sin\omega_1 t + B_1\sin\omega_2 t,$$
$$z_2(t) = \dot{z}_1(t).$$

请注意, 如果对于给定的 ω_1, ω_2, A 或 B 充分大, 或者对于给定的 A、B, ω_1 或 ω_2 充分接近于 1(共振), 则条件 $A_1^2+B_1^2>2$ 可以实现. 又请注意 $A_1^2+B_1^2<2$ 意味着平均方程有一个由 $x_1^2+x_2^2=2(2-A_1^2-B_1^2)$ 给出的由平衡点所成的圆. 伴随着这个平衡点集有许多很有趣的振动现象, 但是讨论很复杂, 在关于积分流型的一章中再论述.

V.5. 具有小阻尼与小调和强迫力的 Duffing 方程

考虑 Duffing 方程

$$\ddot{u}+\varepsilon\delta\dot{u}+u+\varepsilon\gamma u^3=\varepsilon B\cos\omega t \tag{5.1}$$

或等价系统

$$\dot{u}=v,$$
$$\dot{v}=-u-\varepsilon\gamma u^3-\varepsilon\delta v+\varepsilon B\cos\omega t, \tag{5.2}$$

这里 $\varepsilon\geqslant 0,\ \gamma,\ \delta\geqslant 0,\ B,\ \omega\geqslant 0$ 都是实参数. 对于 $\omega^2=1+\varepsilon\beta$, 我们希望确定关于参数的条件, 以保证方程(5.1)有周期为 $2\pi/\omega$ 的周期解. 由于当 $\varepsilon\approx 0,\omega\approx 1$ 时, 强迫函数的频率非常接近方程的自由频率(即方程(5.1)当 $\varepsilon=0$ 时的周期解的频率), 这种情况叫作调和强制. 我们在前面已经看到线性方程 $\ddot{u}+u=\cos t$ 没有周期解, 而且事实上所有解是无界的. 这是由强制函数的共振效果所致. 我们将看到, 非线性方程有某些有趣的性质, 特别是可能存在多于一个的孤立周期解. 请把这个陈述与 IV. 5 节的结果对照. 为了应用第 3 节的结果, 我们在(5.2)中作 van der Pol 变换

$$\begin{aligned} u&=x_1\sin\omega t+x_2\cos\omega t,\\ v&=\omega[x_1\cos\omega t-x_2\sin\omega t]. \end{aligned} \tag{5.3}$$

得到一个等价系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1&=\frac{\varepsilon}{\omega}[\beta u-\gamma u^3-\delta v+B\cos\omega t]\cos\omega t,\\ \dot{x}_2&=-\frac{\varepsilon}{\omega}[\beta u-\gamma u^3-\delta v+B\cos\omega t]\sin\omega t, \end{aligned} \tag{5.4}$$

这里 $\beta=\dfrac{\omega^2-1}{\varepsilon}$, $u,\ v$ 在(5.3)中给出. 为把这些方程的右边对 t 求平均, 把 x_1、x_2 当作常数, 且为方便计令

$$\begin{aligned} x_2&=r\cos\psi,\\ x_1&=r\sin\psi, \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$u=x_1\sin\omega t+x_2\cos\omega t=r\cos(\omega t-\psi),$$
$$v=\omega[x_1\cos\omega t-x_2\sin\omega t]=-\omega r\sin(\omega t-\psi),$$

这避免了求 u 的立方与复杂的三角公式. 现在, 与(5.4)相伴随的平均方程容易看出是

$$\dot{x}_1=\frac{e}{2\omega}\left[\beta x_2-\frac{3\gamma r^2}{4}x_2-\delta\omega x_1+B\right],$$

$$\dot{x}_2=-\frac{e}{2\omega}\left[\beta x_1-\frac{3\gamma r^2}{4}x_1+\delta\omega x_2\right], \tag{5.6}$$

$$r^2=x_1^2+x_2^2.$$

由于 $x_2=r\cos\psi, x_1=r\sin\psi$, (5.6)的平衡点是方程

$$\left(\beta-\frac{3\gamma r^2}{4}\right)r\cos\psi-\delta\omega r\sin\psi+B=0,$$

$$\left(\beta-\frac{3\gamma r^2}{4}\right)r\sin\psi+\delta\omega r\cos\psi=0.$$

的解. 这两个方程等价于方程

$$G(r,\psi,\omega)\xlongequal{\text{def}}\omega^2-1-\frac{3\gamma_0 r^2}{4}+\frac{F_0}{r}\cos\psi=0,$$

$$F(r,\psi,\omega)\xlongequal{\text{def}}F_0\sin\psi-\delta_0\omega r=0, \tag{5.7}$$

这里我们已经令 $\gamma_0=e\gamma, \delta_0=e\delta, F_0=eB$, 这些参数在方程(5.1)中有很好的物理解释.

如果在(5.7)中把 γ_0, δ_0, F_0 当作固定参数, 则(5.7)可以看作三个未知数 ψ, ω, r 的两个方程. 如果存在 ψ_0, ω_0, r_0 使得矩阵

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial(rG)}{\partial r} & \dfrac{\partial(rG)}{\partial\psi} \\ \dfrac{\partial F}{\partial r} & \dfrac{\partial F}{\partial\psi} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

当 $r=r_0, \psi=\psi_0, \omega=\omega_0$ 时的秩等于 2, 则由定理 3.2 知存在 $e_0>0$, 使得方程(5.1)当 $0\leqslant e\leqslant e_0$ 时有一个周期等于 $2\pi/\omega_0$ 的周期解, 由于 $e=0$ 时 $\omega_0=1$, 这个周期解当 $e=0$ 时是 $u=r_0\cos(\omega_0 t-\psi_0)=r_0\cos(t-\psi_0)$. 在方程(5.7)中, 人们经常把(5.1)的解的近似振幅 r 当作一个参数, 而把(5.1)的解的频率和近似位相看成 r 的函数 $\omega(r)$ 和 $\psi(r)$. 在 ω, r 平面内, 曲线 $\omega(r)$ 的图形称为频率响应曲线.

有时候可以用定理 3.1 来讨论上述周期解的稳定性质. 现在细致地讨论某些特殊情形.

情况 1. $\delta=0$(无阻尼). 对于 $\delta=\delta_0=0$, (5.7)的一个解是 $\psi=0$ 与

$$\omega^2=1+\frac{3\gamma_0 r^2}{4}+\frac{F_0}{r}. \tag{5.9}$$

如同前面提到过的, 关系(5.9)称为频率响应曲线. 如果 $\gamma_0=0$, $F_0\neq0$ 或 $\gamma_0\neq0, F_0/\gamma_0$ 充分小, (5.8)这个矩阵的秩便是二. 根据定理 3.2, 存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对于 $\delta=0$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 以及落在频率响应曲线上的每个 ω, r 值, (5.1)有周期为 $2\pi/\omega$ 的解, 由于 $\varepsilon=0$ 时 $\omega=1$, 这个周期解当 $\varepsilon=0$ 时是 $u=r\cos\omega t=r\cos t$. (5.7)也有对应于 $\psi=\pi$ 的解, 但这相应于在(5.9)中以 $-r$ 代替 r. 由定理 3.2 与 $\delta=0$ 时的方程(5.2)所保证了的唯一性质意味着这个解是 $\psi=0$ 时的解的负式.

如果 $F_0\leqslant0$, 在图 5.1 中画出了在 $\omega=1$ 的邻域内硬弹簧 ($\gamma_0>0$) 与软弹簧 ($\gamma_0<0$) 的频率响应曲线图. 这两个图表出了接近 $\omega=1$ 处发生了什么现象.

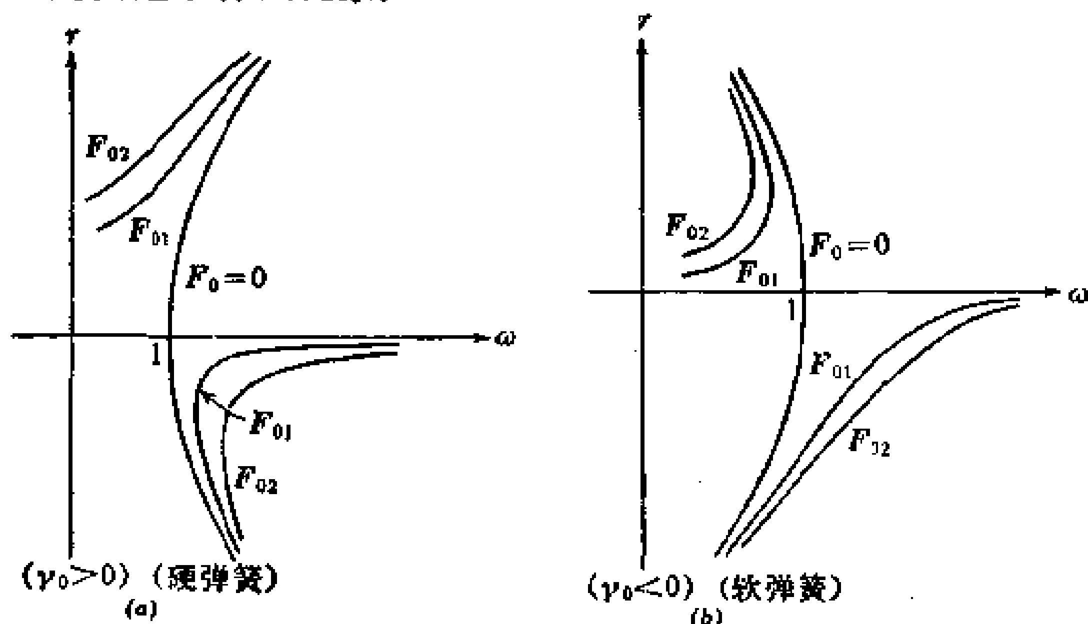


图 Ⅴ.5.1

图 5.1 中的频率响应曲线常用$|r|$而不是r作为纵坐标来画出，得到图 5.2. 请注意非线性($\gamma_0\neq 0$)怎样使线性方程的响应曲线产生弯曲. 曲线$F_0=0$画出了无强迫保守系统$\ddot{u}+u+\gamma_0 u^3=0$的周期解的频率$\omega$与振幅$r$之间的关系. 对于每个接近于$\omega=1$的$\omega$，恰巧只有一个周期为$2\pi/\omega$的周期解. 对于一个给定的$F_0\neq 0$，对于某些$\omega$值有三个这样的周期解，而对于另外的$\omega$值则只有一个这样的周期解.

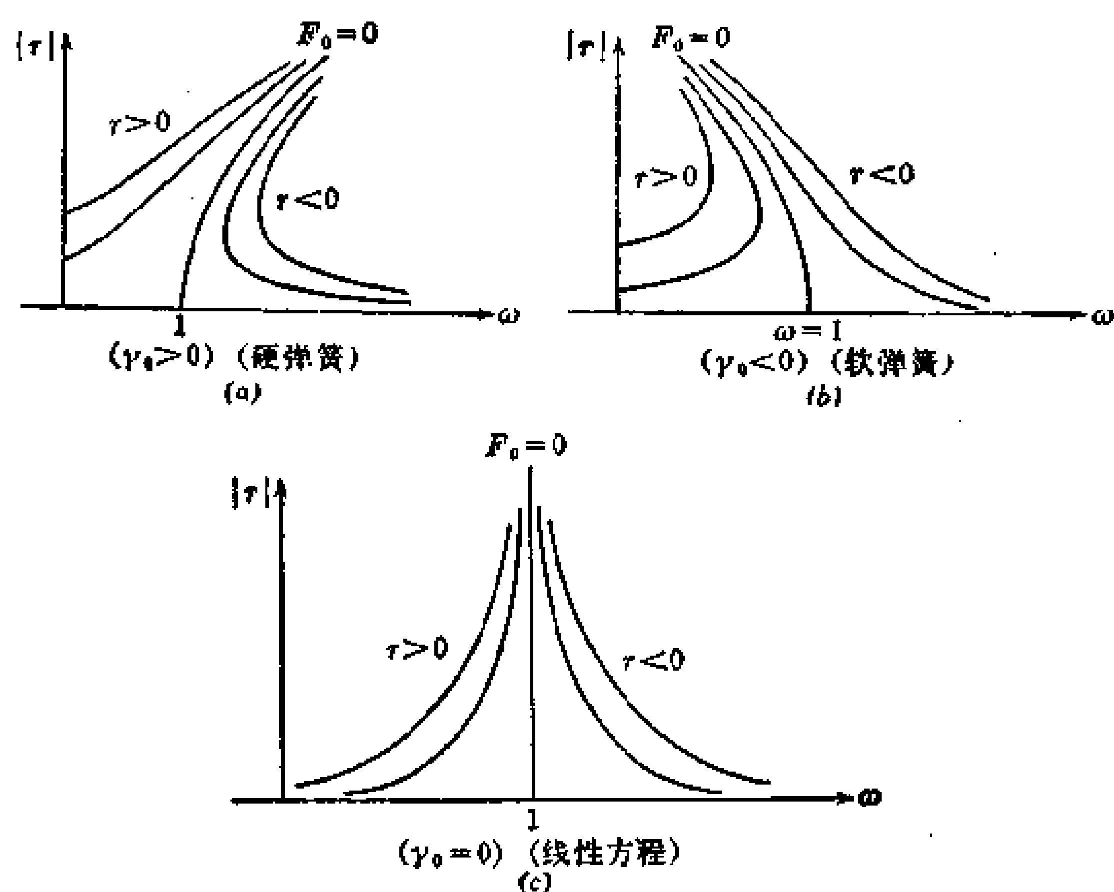


图 1.5.2

让我们强调这个例子的另一个显著的特点，它是方程为非线性这一事实的直接结论. 当$e=0$时，系统(5.1)有等于 1 的自由频率；即线性方程的解是周期为2π的周期解. 另一方面，在上面又指出了对于与e同阶的ω^2-1，存在着周期为$2\pi/\omega$的周期解. 换句话说，用强迫频率抑制与锁住了自由频率. 这个现象有时被

叫作锁定现象或频率诱导，自然，它只可能发生在方程是非线性的时候.

情况 2. $\delta>0$(阻尼). 如果 $\delta_0>0$ 与 $F_0=0$，则利用与在方程(2.1)的讨论中相同的分析，可以看出除非 $u=0$，否则方程(5.1)没有周期解. 这也反映在方程(5.7)中，在这种情况下，除了 $r=0$，它没有解. 如果 $\delta_0F_0\neq0$，总存在 r 的值使得 $|r|<|F_0/\delta_0\omega|$，而从(5.7)的第二个方程可以解出 ψ 作为 $\omega\delta_0r/F_0$ 的函数. 利用这个 ψ，从(5.7)的第一个方程近似地(直到与 ε^2 同阶的项)得到

$$\omega^2=1+\frac{3\gamma_0r^2}{4}\pm\sqrt{\frac{F_0^2}{r^2}-\delta_0^2}. \tag{5.10}$$

对于硬弹簧($\gamma_0>0$)，这个频率响应曲线画在图 5.3 中. 虚线对应于曲线 $\omega^2=1+3\gamma_0r^2/4$. 于是，同 $\delta=0$ 时一样，对于给定的满足 $F_0\delta_0\neq0$ 的 F_0，δ_0，从定理 3.2 推知对于某些 ω 值有三个周期为 $2\pi/\omega$ 的周期解，而对于另外的 ω 值则只有一个这样的解. 对于给定的 ω，哪些解稳定又哪些解不稳定？为了讨论这个问题，我们研究平均方程与这些平衡点相关连的线性变分方程，并且用定理 3.1. 如所预料，分析十分复杂. 另一类在平均法的应用中广泛使用的坐标系统对于这个讨论证明是有用的.

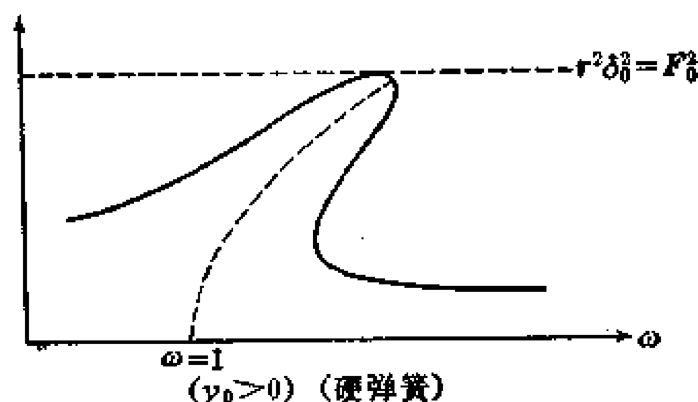


图 V.5.3

在(5.2)中，用关系式

$$u = r\cos(\omega t-\psi),$$
$$v = -r\omega\sin(\omega t-\psi), \tag{5.11}$$

引入新变量 r,ψ，得到等价的方程组($\varepsilon\beta=\omega^2-1$)

$$\dot{r}=\frac{1}{\omega}\left[-\frac{\varepsilon\beta}{2}\sin 2(\omega t-\psi)-\varepsilon f\sin(\omega t-\psi)\right],$$
$$\dot{\psi}=\frac{1}{\omega}\left[\frac{\varepsilon\beta}{2}+\frac{\varepsilon\beta}{2}\cos 2(\omega t-\psi)+\frac{\varepsilon}{r}f\cos(\omega t-\psi)\right], \tag{5.12}$$

这里 $f=-\gamma u^3-\delta v+B\cos\omega t$，而 u,v 由(5.11)给出. 与(5.12)相关连的平均方程是

$$\dot{r}=-\frac{1}{2\omega}[\varepsilon\delta\omega r-\varepsilon B\sin\psi]=\frac{1}{2\omega}F(r,\psi,\omega),$$
$$\dot{\psi}=\frac{1}{2\omega}\left[\varepsilon\beta-\frac{3}{4}\varepsilon\gamma r^2+\frac{\varepsilon B}{r}\cos\psi\right]=\frac{1}{2\omega}G(r,\psi,\omega), \tag{5.13}$$

这里的 F, G 定义在(5.7)中. 因此(5.13)的平衡点是(5.7)的解 r,ψ,ω. 如果在任意一个这样的平衡点，线性变分方程的系数矩阵的特征值都是实部不为零的，则定理 3.1 给出的不但有(5.1)的周期为 $2\pi/\omega$ 的周期解的存在性，而且有它的稳定性质. 如果这些特征值实部都是负的，这个解一致渐近稳定，如果有一个特征值实部是正的，这个解不稳定. 这个矩阵的特征值都有负实部的必要充分条件是这个矩阵的迹是负的而其行列式是正的. 用(5.13)中的 F,G 来说，有一个渐近稳定解，当且仅当

$$F_r+G_\psi<0,$$
$$F_rG_\psi-F_\psi G_r>0,$$

这里下标表示对哪个变量求导数，自然，所有的函数值都在平衡点计算. 容易看出，这些偏导数是

$$F_r=-\delta_0\omega,$$
$$F_\psi=F_0\cos\psi,$$

$$G_r = -\frac{3}{2}\gamma_0 r - \frac{F_0}{r^2}\cos\psi,$$

$$G_\psi = -\frac{F_0}{r}\sin\psi.$$

因此，在平衡点 $F_r + G_\psi = -2\delta_0\omega < 0$，只要 $F_r G_\psi - G_r F_\psi$ 不是零，通过研究它的符号便可决定稳定或不稳定.

可以把最后这个稳定性的条件用点 r，ω 位于频率响应曲线的何处表示出来. 为了看出这一点，考虑(5.13)的平衡点，即 $F(r,\psi,\omega) = 0 = G(r,\psi,\omega)$ 的作为 ω 的函数的解. 把这些方程对 ω 求导数，用下标表出导数，得到

$$-F_\omega = F_r r_\omega + F_\psi \psi_\omega,$$

$$-G_\omega = G_r r_\omega + G_\psi \psi_\omega,$$

于是，

$$r_\omega (F_r G_\psi - G_r F_\psi) = G_\omega F_\psi - F_\omega G_\psi. \tag{5.14}$$

因此解的稳定性质可以翻译成 $r_\omega(G_\omega F_\psi - F_\omega G_\psi)$ 的符号. 这个表示式为正，对应着稳定，表示式为负，对应着不稳定. 由于 $F_\omega = -\delta_0 r$，$G_\omega = 2\omega$，推出

$$G_\omega F_\psi - F_\omega G_\psi = 2\omega F_0 \cos\psi + \delta_0 F_0 \sin\psi$$
$$= 2\omega r(\nu^2 - \omega^2) + \delta_0^2 \omega r,$$

这里 $\nu^2 = 1 + 3\gamma_0 r^2/4$. 从(5.10)知如果 ε 充分小，$\omega^2 - \nu^2 = O(\varepsilon)$，又由于 δ_0^2 是 $O(\varepsilon^2)$，这个表示式的符号由 $\omega^2 - \nu^2$ 确定. 利用(5.14)，最后我们有：

设 $\nu^2 = 1 + 3\gamma_0 r^2/4$，又 r 由频率响应曲线(5.10)给定为 ω 的函数. 如果 $(dr/d\omega)(\nu^2 - \omega^2) > 0$，则 $\delta > 0$ 的 Duffing 方程(5.1)的周期解是稳定的，如果 $(dr/d\omega)(\nu^2 - \omega^2) < 0$，这解不稳定.

如果画出来，硬弹簧的情形如图 5.4 所示. 黑点表示不稳定点. 箭头 → 表示当 ω 增大时稳定周期运动的振幅将要改变的典型方式，而向后的 ← 画出 ω 减小时的情形.

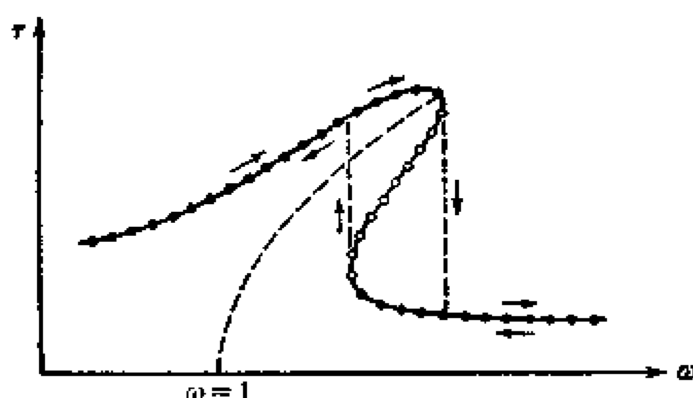


图 V.5.4

V.6. Duffing 方程的三阶次调和解

考虑方程

$$\ddot{u}+\varepsilon c\dot{u}+\frac{1}{9}u+\varepsilon\gamma u^3=B\cos\omega t, \tag{6.1}$$

或等价系统

$$\begin{aligned}\dot{u}&=v,\\ \dot{v}&=-\frac{1}{9}u-\varepsilon cv-\varepsilon\gamma u^3+B\cos\omega t,\end{aligned} \tag{6.2}$$

这里 $\varepsilon\geqslant0$, $c\geqslant0$, γ, B 与 ω 都是常数，当 $\varepsilon\to0$ 时 $\omega-1=O(\varepsilon)$. 问题是确定在什么条件下(6.1)有周期为 $6\pi/\omega$ 的周期解，而它的 ε 零阶项是

$$\begin{aligned}u&=r\sin\left(\frac{\omega}{3}t+\phi\right)+A\cos\omega t,\\ v&=\frac{\omega}{3}r\cos\left(\frac{\omega}{3}t+\phi\right)-\omega A\sin\omega t.\end{aligned} \tag{6.3}$$

如果这样一个解存在，它叫作三阶次调和解. 如果存在任意一个这样的解，则显然 A 必须等于 $-B/(\omega^2-1/9)$. 方程(6.1)的自由频率是$\frac{1}{3}$，而强迫频率近似于 1. 因此，如果存在次调和解，则出现了周期等于强迫周期三倍的周期解，在这种意义下，自由频

率再次被用强迫频率 ω 抑制与锁住. 对于次调和解的存在，形式(6.1)很重要. 事实上，如果(6.1)中的阻尼系数对所有 $\varepsilon\geqslant 0$ 是常数 $c_1>0$，则在 IV.5 节已指出不可能存在这样的次调和解.

如果(6.3)中的 r,ϕ 被选作新坐标，新方程便是

$$\begin{aligned}\dot{r}&=\frac{\varepsilon}{\omega}\left[\frac{\beta}{6}r\sin 2\left(\frac{\omega}{3}t+\phi\right)-3(cv+\gamma u^3)\cos\left(\frac{\omega}{3}t+\phi\right)\right],\\ \dot{\phi}&=\frac{\varepsilon}{\omega}\left[-\frac{\beta}{3}\sin^2\left(\frac{\omega}{3}t+\phi\right)+3\frac{(cv+\gamma u^3)}{r}\sin\left(\frac{\omega}{3}t+\phi\right)\right],\end{aligned}\tag{6.4}$$

这里 $\omega^2-1=\varepsilon\beta$，又 u、v 由(6.3)给出.

平均方程(除了某些与 ε^2 同阶的项)是

$$\begin{aligned}\dot{r}&=\frac{\varepsilon r}{2\omega}\left[-c+\frac{27\gamma rA}{2}\cos 3\phi\right],\\ \dot{\phi}&=\frac{\varepsilon}{6\omega}\left[-\beta+\frac{27\gamma A}{2}(A-r\sin 3\phi)+\frac{27\gamma r^2}{4}\right].\end{aligned}\tag{6.5}$$

利用 $\omega^2-1=\varepsilon\beta$ 这一事实与令 $\gamma_0=\varepsilon\gamma$，(6.5)的平衡点的方程是

$$\begin{aligned}&(a)\quad \cos 3\phi=\frac{2c}{27\gamma Ar},\\ &(b)\quad \omega^2=1+\frac{27\gamma_0}{4}[r^2+2A^2]\mp\left[\left(\frac{27\gamma_0 Ar}{2}\right)^2-c^2\right]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{6.6}$$

这里后首的表示式用 $A=-9B/8$ 来计算，直到与 ε^2 同阶的项. 当 $c=0$ (没有阻尼)时，频率响应曲线公式(6.6b)简化成

$$\omega^2=1+\frac{27\gamma_0 A^2}{4}+\frac{27\gamma_0}{4}(r\pm A)^2.$$

图 6.1 给出了频率响应曲线的大致形状.

现在完全和在前一节中同样地利用定理 3.2 与定理 3.1，得到(6.1)的精确解的存在性以及这样一个解对于满足(6.6)的 ω, r, ϕ 值的稳定性质.

由于已经说明上述分析只对 ε 甚小即 ω 近于 1 正确，因此如

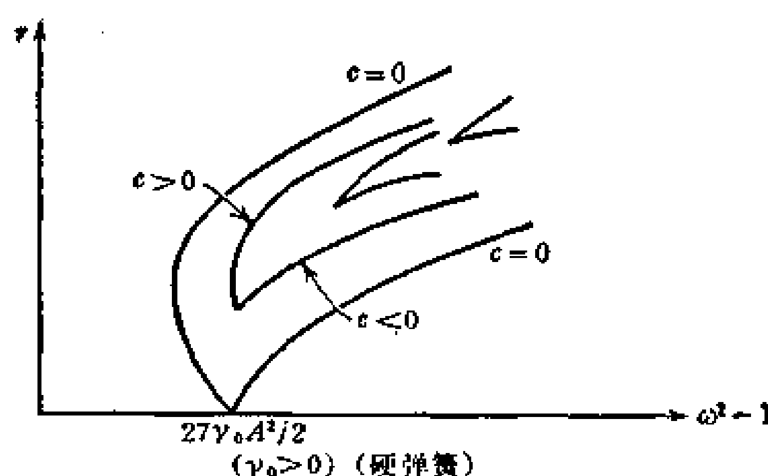


图 V.6.1

果 c 取得太大，方程 (6.1) 可能没有三阶次调和解，这个事实在 IV.5 节中证实过，频率响应曲线又把它暗示出来．此外，请注意一旦知道存在了一个次调和解，通过将时间平移 $2\pi/\omega$ 就简便地得到另外两个不同的次调和解．

V.7．有振动支柱的被阻受激摆

一个有小振幅快速铅垂振动支柱的单摆，受到线性阻尼与正弦式激励，它的运动可以近似地用方程

$$\ddot{u}+c\dot{u}+\left(1+e\frac{d^2h(\nu t)}{dt^2}\right)\sin u-F\cos\omega t=0 \qquad (7.1)$$

来表示，这里 u 是角坐标，从底部位置量起，$h(\tau)=h(\tau+2\pi)$，$\nu=e^{-1}$，$0<e\ll 1$，又 c,F,ω 是不依赖于 e 的实正参数．

为了把(7.1)变换成可应用定理 3.3 的形式(3.10)，把除含 c 的项以外全部项从 Hamilton 函数

$$H(v,u,t)=\frac{1}{2}\left[v^2-2ev\frac{dh}{dt}\sin u-e^2\left(\frac{dh}{dt}\right)^2\cos^2 u\right]$$
$$-(1-\cos u)+uF\cos\omega t \qquad (7.2)$$

推导出来，这样比较方便．在(7.2)中，v 是共轭于 u 的动量，而 h 的宗量是 νt．因此运动方程是

$$\dot{u}=v-\varepsilon\frac{dh}{dt}\sin u, \tag{7.3}$$

$$\dot{v}=-\left[-\varepsilon v\frac{dh}{dt}\cos u+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2\sin 2u+\sin u-F\cos\omega t\right]$$
$$-c\left(v-\varepsilon\frac{dh}{dt}\sin u\right),$$

这里 h 的宗量是 νt.

如果 $\nu t=\tau$, 又把对 τ 求导数用在右上角带一撇来表示，则方程(7.3)成为

$$u'=\varepsilon[v-h'\sin u], \tag{7.4}$$

$$v'=\varepsilon\left[vh'\cos u-\frac{1}{2}(h')^2\sin 2u-\sin u-cv+ch'\sin u\right]$$
$$+\varepsilon F\cos\varepsilon\omega\tau,$$

这里 h 的宗量是 τ. 方程(7.4)是系统(3.10)的特殊情形，方括弧内的表达式是快时间 τ 的周期函数，而其它项则是慢时间 $\varepsilon\tau$ 的周期函数.

考虑 $h(\tau)=A\sin\tau$ 与 A 是常数的特殊情形，此时对应于方程(7.4)的平均方程(3.11)是

$$\begin{aligned}u'&=\varepsilon v,\\ v'&=-\varepsilon\left[\frac{A^2}{2}\sin u\cos u+\sin u+cv\right]+\varepsilon F\cos\varepsilon\omega\tau.\end{aligned} \tag{7.5}$$

用原来的时间来表示，这些方程等价于方程

$$\begin{aligned}\dot{u}&=v,\\ \dot{v}&=-\left(1+\frac{A^2}{2}\cos u\right)\sin u-cv+F\cos\omega t,\end{aligned} \tag{7.6}$$

或单个二阶方程

$$\ddot{u}+c\dot{u}+\left(1+\frac{A^2}{2}\cos u\right)\sin u=F\cos\omega t. \tag{7.7}$$

如果方程(7.7)有周期为 $2\pi/\omega$ 的周期解，它的线性变分方程的特

征指数实部都是负的，则定理 3.3 意味着原方程(7.1)有一个渐近稳定的殆周期解，当 $\varepsilon\to 0$ 时它趋于此解. 为了找出(7.7)有此周期解的条件，可以直接对 (7.7) 用第 IV 章的结果或平均法(定理 3.1 与 3.2). 例如，如果 F 甚小，可以很有效地利用第 IV 章的结果如下：对于 $F=0$，(7.7)的平衡点是 $u=0, u=\pi$，如果 $A^2>2$，还有 $u=\cos^{-1}(2/A^2)$. 如果 $u=\pi+w$，则(7.7)成为

$$\ddot{w}+c\dot{w}+\left(\frac{A^2}{2}\cos w-1\right)\sin w=F\cos\omega t, \tag{7.8}$$

而这可以改写成

$$\ddot{w}+c\dot{w}+\left(\frac{A^2}{2}-1\right)w=F\cos\omega t+\left(\frac{A^2}{2}-1\right)(w-\sin w)$$
$$+\frac{A^2}{2}(1-\cos w)\sin w.$$

如果 $A^2/2>1$ 又 F 甚小，这个方程满足定理 IV.2.1 与定理IV.3.1 的条件. 因此可以断言(7.8)有周期为 $2\pi/\omega$ 的渐近稳定周期解. 这又意味着由 (7.1) 描述的摆可以在铅直位置的邻域内实现稳定的运动.

V.8. 习题

习题 8.1. 有强度为 I 的电流流过的无穷长导线吸引着一个长度为 l、质量为 m、有强度为 i 的电流通过的导线 AB. 此外，导线 AB 受弹簧 C 的引力，引力正比于它的变位量，比例常数为 k. 把弹簧没有变位时 AB 的位置选作 $x=0$，AB 的运动方程是

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-\frac{k}{m}\left(x-\frac{\lambda}{a-x}\right),\end{aligned} \tag{8.1}$$

这里 $\lambda=2Iil/k$，而 a 是 $x=0$ 时两导线间的距离. 试按照例 1.3 的线索来讨论这个方程解的性态.

习题 8.2. 对于 $c>0, h>0$，当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\omega-1=O(\varepsilon)$，求

$$\ddot{x}+x=\varepsilon[-c\dot{x}+hx^3+x\cos 2\omega t] \tag{8.2}$$

的周期解. 请画出频率响应曲线，在 ω 轴上找出分别有一个，两个与三个周期解的区间，并讨论这些解的稳定性质.

习题 8.3. 具有铅垂正弦式振动支柱的平面摆方程可以写成

$$\ddot{\theta}+c\dot{\theta}+\frac{g-I\omega^2\sin\omega t}{l}\sin\theta=0. \tag{8.3}$$

如果 $\tau=\omega t, I/l=\varepsilon, \varepsilon^2k^2=g/l\omega^2, c/\omega=2\varepsilon\alpha$，我们就有

$$\theta''+2\varepsilon\alpha\theta'+(\varepsilon^2k^2-\varepsilon\sin\tau)\sin\theta=0,$$

这里 $'=d/d\tau$. 试说明当 ε 小时，如果 θ 在 0、π 或 2π 与 $\cos^{-1}2k^2$ 的邻域中，这个系统有周期为 $2\pi/\omega$ 的周期解. 作为 α 与 k 的函数，请讨论解的稳定性质. 为此，由

$$\theta=\phi-\varepsilon\sin\tau\sin\phi,$$
$$\theta'=\varepsilon\Omega-\varepsilon\cos\tau\sin\phi$$

引入变量 ϕ 与 Ω，并利用平均法.

习题 8.4. 考虑二阶系统

$$\ddot{x}+x=\varepsilon[f(x)-c\dot{x}+\sin\omega t], \tag{8.4}$$

这里 $c>0, 0<\varepsilon\ll 1, f(x)$ 是 x 的连续函数，又 $\omega-1=O(\varepsilon)$. 试对于小的 ε，确定使方程有周期为 $2\pi/\omega$ 的周期解的 ω. 确定频率响应的近似表示式. 研究解的稳定性. 证明如果 $\gamma=\varepsilon^{-1}(\omega^2-1)$，$c>0$ 又

$$\frac{da}{d\gamma}[\gamma+G(a)+O(\varepsilon)]<0,$$

这里 $G(a)=(1/\pi a)\int_0^{2\pi}f(a\cos\phi)\cos\phi d\phi$. 则此周期解渐近稳定. 为此，利用变换

$$x=A(t)\cos(\omega t+\Theta(t)),$$
$$\dot{x}=-\omega A(t)\sin(\omega t+\Theta(t)).$$

请注意 $\gamma+G(a)=0$ 是 $c=0$ 的自治问题的周期运动的振幅与频

率之间的近似关系式。

习题 8.5. 对于小的 ε, 请说明方程系统

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1+x_1&=\varepsilon(1-x_1^2-\alpha x_2^2)\dot{x}_1, \\ \ddot{x}_2+2x_2&=\varepsilon(1-\alpha x_1^2-x_2^2)\dot{x}_2 \end{aligned} \tag{8.5}$$

有两个周期解. 把这些解作为 a、α 的函数来讨论其稳定性质. 为此, 引入新坐标

$$x_1=\rho_1\cos\theta,$$

$$\dot{x}_1=-\rho_1\sin\theta,$$

$$x_2=\rho_2,$$

$$\dot{x}_2=\rho_3,$$

用 θ 代替 t, 并用平均法. 利用相似的坐标求第二个解. 你能猜测出当轨道的稳定性质改变时在几何上发生什么现象吗?

V.9. 对进一步学习的说明与建议

第 1 节中关于保守系统的结果很简单, 但是除开二维情形, 并没有提供多少信息. 高维保守系统曾经是而且在今后多少年内将仍旧是对于理论提出挑战的题目. 情况比非保守系统还要复杂, 读者可以参考 Poincaré [2], Birkhoff [1], Kolmogorov [1], Arnol'd[2], Moser[1].

第 3 节的平均法是从 Krylov 与 Bogoliubov 的著名论文 [1] 发展起来的, 在 Bogoliubov 与 Mitropolski 的书[1]中有介绍. 基本引理 3.1 是 Bogoliubov 提出的. 定理 3.3 与第 7 节的例子由 Sethna[1]提出. 平均法有许多变种, 读者可以参考 Mitropolski [1]与 Morrison[1] 以求进一步讨论与补充文献. 另外一些出现有趣的振动现象的方程, 可在 Bogoliubov 与 Mitropolski[1], Malkin[2], Minorsky[1], Andronov, Vitt 与 Khaikin[1], Hale [7]等书中找到。

第 VI 章　在周期轨道附近的性态

在 Ⅲ.6 节与第 Ⅳ 章中，对于一个系统(与系统的扰动系统)的解在平衡点附近的性态，曾经发展了一种颇为广泛的理论．在这一章与下一章里，我们对于比较复杂的不变集合即闭曲线来考虑同样的问题．

假设 $u:R\to R^n$ 是一个周期为 ω 的周期函数，它与它的一阶导数连续，对于 $(-\infty,\infty)$ 内的所有 θ，$du(\theta)/d\theta\neq 0$，又 $u:[0,\omega)\to R^n$ 是一个同胚．如果

$$\Gamma=\{x\in R^n: x=u(\theta),\ 0\leqslant\theta\leqslant\omega\},\tag{1}$$

则 Γ 是一条闭曲线，实际上是一条 Jordan 曲线．

假设 $f:R^n\to R^n$ 连续，并且满足足够的光滑性质以保证

$$\dot{x}=f(x)\tag{2}$$

通过 R^n 内的任意一个点有唯一解．

在整个这一章里，将假定曲线 Γ 相对于(2)的解是不变量；也就是说，(2)的任何初始值在 Γ 上的解对 $(-\infty,\infty)$ 内的所有 t 都继续在 Γ 上．如果 Γ 是(2)的一条周期轨道，则(2)有周期解 $\phi(t)$ 使得

$$\Gamma=\{x: x=\phi(t),\ -\infty<t<\infty\}.$$

在这种情况下，我们可以把函数 ϕ 选作 Γ 的参数表达式；即可以选 $u=\phi$．下面对于周期轨道总是选定这样一个参数表达式．如果 Γ 不是周期轨道，则它一定包含平衡点与 α 极限集和 ω 极限集是平衡点的轨道．

从前面的说明得知如果 $x^*(t)(-\infty<t<\infty)$ 是(2)的 $x^*(0)$ 在 Γ 上的任意一个解，则存在三种可能性：(i)有 $\tau>0$ 使得 $x^*(t)$

是最小周期为 τ 的周期函数；(ii) $x^*(t)$ 是一个平衡点；(iii) $x^*(t)$ 的 α 极限集和 ω 极限集是平衡点. 在第一种情况下，曲线 Γ 可以用 $x=x^*(\theta), 0\leqslant\theta<\tau$ 作为参数表达式，而(2)的任何在 Γ 上的解[这样的解必是 $x^*(t+\alpha)$，其中 α 为某个常数] 定义了一个函数 $\theta(t)(-\infty<t<\infty)$，使得 $\dot{\theta}=1$. 在(ii)或(iii)这两种情况之一下，(1)的在 Γ 上的任意解 $x^*(t)$ 定义了 $-\infty<t<\infty$ 的一个连续可微函数 $\theta(t)=u^{-1}(x^*(t))$，又 $\dot{\theta}=g(\theta)$，这里 $g(\theta)=[\partial u^{-1}(u(\theta))/\partial x]f(u(\theta))=[du(\theta)/d\theta]^{-1}f(u(\theta))$. 特别在情况(ii)，$g(\theta)$ 必有零点. 在所有三种情况下，我们因此可以断言存在一个连续函数 $g(\theta)$，使得

$$\frac{du(\theta)}{d\theta}g(\theta)=f(u(\theta)), \tag{3}$$

$$g(\theta+\omega)=g(\theta), \quad 0\leqslant\theta\leqslant\omega.$$

再者，如果 Γ 是由(2)的一个周期解生成的，则 $g(\theta)$ 可以取作恒等于1，又如果 Γ 包含(2)的一个平衡点，则 $g(\theta)$ 必有零点.

在这一章里，我们主要关心(2)的解在一个周期轨道附近的性态(稳定性与鞍点性质的充分条件)和系统

$$\dot{x}=f(x)+F(x,t) \tag{4}$$

在 F 是不依赖于 t 的小扰动的情况下周期轨道的存在性. 在下一章，将讨论 Γ 是任意的不变曲线而扰动 F 依赖于 t 的情形. 在两种情况下，第一步都是在 Γ 的邻域内引进方便的坐标系. 这种坐标系在本章中介绍.

VI.1. 在不变闭曲线的周围的局部坐标系

沿着 Γ 的移动标准正交系就是对于 $[0, \omega]$ 内的每个 θ，R^n 的一个这样的标准正交坐标系 $\{e_1(\theta),\cdots e_n(\theta)\}$，它对于 θ 的周期是 ω，并且诸 $e_j(\theta)$ 之一等于 $[du(\theta)/d\theta]/|du(\theta)/d\theta|$.

第一个目的是说明对于Γ有许多移动标准正交系. 为此，需要下述引理.

引理 1.1. 如果$n\geqslant 3$, 又$v(\theta)$是R^n的一个单位向量，它的周期是ω,并且满足 Lipschitz 条件，则存在一个单位向量ξ(不依赖于θ)，使得对于所有θ有$v(\theta)\neq\pm\xi$.

证明 这个引理是实变量的为人熟知的事实的结论. 事实上，如果$0\leqslant\theta\leqslant\omega$, $|v(\theta)|=1$，集合$x=v(\theta)$是R^n内的单位球S^{n-1}上的一条曲线. 由于$v(\theta)$满足 Lipschitz 条件，这条曲线可求长，而在$R^n(n\geqslant 3)$内的球面上的可求长曲线复盖一个测度为零的集合. 因此在S^{n-1}内总存在一个不在这条曲线或由$-v(\theta)$定义的曲线上的向量ξ.

不援引这个结果，在这里给出一个证明. 如果S是R^n内单位球上的任意直径小于d的集合，则存在一个常数K(不依赖于S)与一个球冠S_c, 使得$S\subset S_c$，而且S_c的面积小于Kd^{n-1}. 如果M是v的Lipschitz 常数；也就是说$|v(\theta)-v(\theta')|\leqslant M|\theta-\theta'|$，又如果区间$[0,\omega)$被分成$N$个相等的部分，则由$v(\theta)(0\leqslant\theta<\omega)$定义的曲线可以用总面积小于$NK(M\omega/N)^{n-1}$的$N$个球冠所复盖. 相似地，由$-v(\theta)(0\leqslant\theta<\omega)$所定义的曲线也可以用总面积小于同一量的$N$个球冠所复盖. 由于$n\geqslant 3$, 当$N\to\infty$时面积的上界趋于零，它意味着向量$\xi$可以从单位球的“几乎”任意地方取得. 这就证明了引理.

为了叙述下一个结果，设$\mathscr{C}^p(R, R^n)$表示$R\to R^n$的这些函数的空间，它们以及它们直到p阶的所有导数连续.

定理 1.1. 如果$p\geqslant 2$, $u\in\mathscr{C}^p(R,R^n)$, $\omega>0$, $u(\theta+\omega)=u(\theta)$, $du(\theta)/d\theta\neq 0$, $0\leqslant\theta<\omega$, 而Γ在(2)中定义，则沿着Γ存在一个移动标准正交系，它在$\mathscr{C}^{p-1}(R,R^n)$内.

证明 假设$n\geqslant 3$. 如果$v(\theta)=[du(\theta)/d\theta]/|du(\theta)/d\theta|$，则

由关于 u 的假定推知 v 的周期是 ω 并且满足 Lipschitz 条件. 设 e_1 是一个常单位向量使得 $0\leqslant\theta\leqslant\omega$ 时 $e_1\neq\pm v(\theta)$ (它的存在性由引理 1.1 保证). 对 e_1 再添加任意常向量 $e_2, \cdots, e_n$, 使得 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 R^n 的一个标准正交基. 于是, 可以按照下述方式得到沿着 Γ 的移动标准正交系: 设 S 是 R^n 的正交于由 e_1 与 $v(\theta)$ 形成的平面的 $n-2$ 维子空间, 按正方向围绕 S 旋转坐标系, 一直到 e_1 与 $v(\theta)$ 重合(见图 1.1). 如果 $\xi_2(\theta), \cdots, \xi_n(\theta)$ 是 $e_2, \cdots, e_n$ 在旋转后的位置, 则

$$\{v(\theta), \xi_2(\theta), \cdots, \xi_n(\theta)\}, \quad 0\leqslant\theta\leqslant\omega \tag{1.1}$$

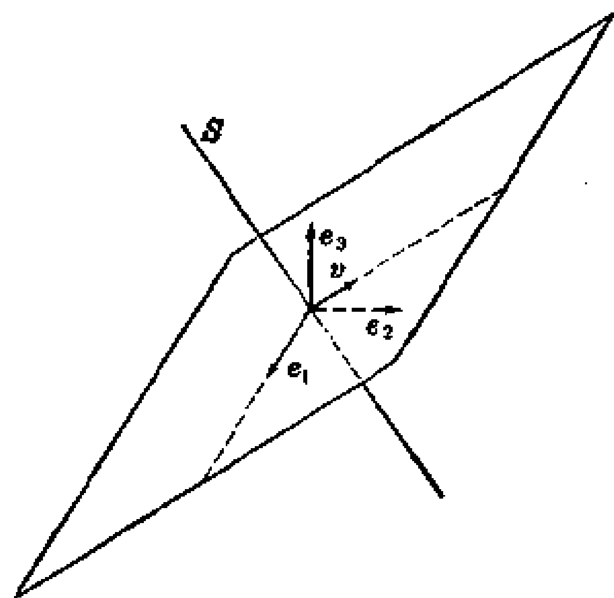


图 Ⅵ.1.1

给出移动标准正交系. 如果 $\gamma_j(\theta)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 是 $v(\theta)$ 的方向角, $e_j\cdot v(\theta)=\cos\gamma_j(\theta)$, $(j=1, 2, \cdots, n)$. 则可以证明向量 ξ_j 由

$$\xi_j(\theta)=e_j-\frac{\cos\gamma_j(\theta)}{1+\cos\gamma_1(\theta)}(e_1+v(\theta)), \; j=2, 3, \cdots, n \tag{1.2}$$

给出.

(1.2)的推导进行如下. 假设

$$e_j=\bar{e}_j+\lambda_j e_1+\mu_j v,$$

这里 $\bar{e}_j$ 属于 S. 于是 ξ_j 的最后位置是

$$\xi_j=\bar{e}_j+\lambda'_j e_1+\mu'_j v,$$

这里 λ'_j, μ'_j 由 λ_j、μ_j 通过在 e_1, v 平面内旋转角 $\gamma_1(\cos\gamma_1=e_1\cdot v)$ 来确定. 因此

$$\lambda'_j=-\mu_j,$$

$$\mu'_j=\lambda_j+2\mu_j\cos\gamma_1,$$

而

$$\xi_j=e_j-(\lambda_j+\mu_j)e_1+[\lambda_j+\mu_j(2\cos\gamma_1-1)]v.$$

由于 S 正交于 e_1、v, 推出

$$e_1\cdot[e_j-\lambda_j e_1-\mu_j v]=0,$$

$$v\cdot[e_j-\lambda_j e_1-\mu_j v]=0,$$

而这意味着

$$\lambda_j=-\frac{\cos\gamma_1\cos\gamma_j}{\sin^2\gamma_1},$$

$$\mu_j=\frac{\cos\gamma_j}{\sin^2\gamma_j}.$$

代人 ξ_j 的表达式, 就得到(1.2).

对于 $n=2$ 的情形, 容易作出移动标准正交系, 它是

$$(v(\theta),\xi_2(\theta)),\quad \xi_2(\theta)=\pm(-v_2(\theta),v_1(\theta)), \tag{1.3}$$

这里 v 的坐标是 v_1、v_2.

移动标准正交系的显公式(1.1)—(1.2)清楚地表明, 如果 u 在 $\mathscr{C}^p(R,R^n)$内, 则此坐标系在 $\mathscr{C}^{p-1}(R,R^n)$内. 定理证毕.

一旦知道了沿着 Γ 的一个移动标准正交系, 就可以用这个系求得围绕 Γ 的"管"的坐标系. 事实上, 设 $u(\theta)$ 如定理1.1中所给, $v(\theta)=[du(\theta)/d\theta]/|du(\theta)/d\theta|$, 令 $(v, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是沿着 Γ 的一个移动标准正交系. 考虑化变量 x 成 (θ, ρ) 的变换, 这里 $\rho=(\rho_2, \cdots, \rho_n)$ 的转置列向量, 变换公式是

$$x=u(\theta)+Z(\theta)\rho,\ Z=[\xi_2,\cdots,\xi_n],\ 0\leqslant\theta<\omega. \tag{1.4}$$

Z 是 $n\times(n-1)$ 矩阵，它的列向量是 $\xi_2, \cdots, \xi_n$.

为了说明这个变换在 Γ 的充分小邻域里(即 ρ 充分小处)是意义明确的，设

$$F(x, \theta, \rho) \xlongequal{\text{def}} u(\theta) + Z(\theta)\rho - x.$$

F 相对于 θ, ρ 的偏导数是

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{du(\theta)}{d\theta} + \frac{dZ(\theta)}{d\theta}\rho,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = Z(\theta).$$

由于对所有 $\theta, du(\theta)/d\theta \neq 0$，又 $v(\theta)$，$Z(\theta)$ 是一个移动标准正交系，所以对于 $\rho = 0$，$0 \leqslant \theta \leqslant \omega$，有 $\det[\partial F/\partial \theta, \partial F/\partial \rho] = |du(\theta)/d\theta|.\ \det[v(\theta), Z(\theta)] \neq 0$. 因此，存在不依赖于 θ 的 $\delta > 0$，使得 $|\rho| \leqslant \delta, 0 \leqslant \theta \leqslant \omega$ 时 $\det[\partial F/\partial \theta, \partial F/\partial \rho] \neq 0$. 由于闭曲线 Γ 是紧致的，有限次利用隐函数定理，可以说明(1.4)对于 $0 \leqslant |\rho| \leqslant \rho_1 (\rho_1 > 0)$，$0 \leqslant \theta \leqslant \omega$ 是一个意义确切的变换.

现在我们在微分方程(4)中作变换(1.4)，利用 u 满足(3)的事实，得到 θ、ρ 的新微分方程. 假定 f 对 x 的一阶导数连续，而 u 满足定理 1.1 的条件.

如果 $x(t) = u(\theta(t)) + Z(\theta(t))\rho(t)$ 满足(4)，则

$$\left[\frac{du(\theta)}{d\theta} + \frac{dZ(\theta)}{d\theta}\rho\right]\dot{\theta} + Z(\theta)\dot{\rho}$$

$$= f(u(\theta) + Z(\theta)\rho) + F(t, u(\theta) + Z(\theta)\rho). \qquad (1.5)$$

在 Γ 的 ρ_1 邻域 Γ_{ρ_1} 内，$\dot{\theta}$，$\dot{\rho}$ 的系数矩阵是非奇异的. 因此从方程(1.5)可以把 $\dot{\theta}, \dot{\rho}$ 解出作为 θ, ρ, t 的函数. 显式的方程可如下求得. 利用(4)，并把(1.5)的两边投影到 $v(\theta)$ 上，得

$$\dot{\theta} = g(\theta) + f_1(\theta, \rho) + h'(\theta, \rho)F(t, u(\theta) + Z(\theta)\rho), \qquad (1.6)$$

这里 h' 是 h 的转置，

$$h(\theta,\rho)=\left[\left|\frac{du(\theta)}{d\theta}\right|+v'(\theta)\frac{dZ(\theta)}{d\theta}\rho\right]^{-1}v(\theta), \tag{1.7}$$

$$f_1(\theta,\rho)=-h'(\theta,\rho)\frac{dZ(\theta)}{d\theta}\rho g(\theta)+h'(\theta,\rho)[f(u(\theta)$$

$$+Z(\theta)\rho)-f(u(\theta))].$$

把(1.5)的两边投影到 $Z(\theta)$ 上，利用$Z'(\theta)f(u(\theta))=Z'(\theta)\times g(\theta)du(\theta)/d\theta=0$ 的事实，得到

$$\dot{\rho}=A(\theta)\rho+f_2(\theta,\rho)$$

$$+Z'(\theta)\left[I-\frac{dZ(\theta)}{d\theta}\rho h'(\theta,\rho)\right]F(t,u(\theta)+Z(\theta)\rho). \tag{1.8}$$

这里 Z' 是 Z 的转置，而

$$A(\theta)=Z'(\theta)\left[-\frac{dZ(\theta)}{d\theta}g(\theta)+\frac{\partial f(u(\theta))}{\partial x}Z(\theta)\right],$$

$$f_2(\theta,\rho)=-Z'(\theta)\frac{dZ(\theta)}{d\theta}\rho f_1(\theta,\rho) \tag{1.9}$$

$$+Z'(\theta)\left[f(u(\theta)+Z(\theta)\rho)-f(u(\theta))\right.$$

$$\left.-\frac{\partial f(u(\theta))}{\partial x}Z(\theta)\rho\right].$$

从上面这些函数的表示式容易看出，如果 $f(x)$对 x 的直到 k ($\geqslant 1$)阶偏导数连续，则 $f_1(\theta,\rho)$，$f_2(\theta,\rho)$对 ρ 的直到 $k(\geqslant 1)$阶的偏导数也连续．并且，当 $\rho\to 0$ 时 $f_1(\theta,\rho)=O(|\rho|)$，$f_2(\theta,0)=0$，$\partial f_2(\theta,0)/\partial\rho=0$. 这些函数对于 θ 的导数的阶数比 f 和 $du(\theta)/d\theta$ 对 θ 导数阶数的最小值还要小一．此外，在 $\dot{\theta}$, $\dot{\rho}$ 的方程中线性地包含 F，其所乘的矩阵对于 ρ 有适当阶的导数，而如果 u 对 θ 有 p 阶导数，则这些矩阵对 θ 有 $p-1$ 阶导数．这些结果概括成

定理 1.2. 如果 u 满足定理 1.1 的条件，$p\geqslant 2$，又 $f\in\mathscr{C}^{p-1}(R^n, R^n)$，则存在 $\delta>0$，n 维向量 $f_2(\theta,\rho)$，$h(\theta,\rho)$，纯量 $f_1(\theta,\rho)$，$(n-1)\times(n-1)$矩阵 $A(\theta)$与$(n-1)\times n$ 矩阵 $B(\theta,\rho)$，

这里所有的函数对 θ 的周期为 ω, 当 $0\leqslant|\rho|\leqslant\delta$, $-\infty<\theta<\infty$时, 对 ρ 有 $p-1$ 阶连续导数, 对 θ 有 $p-2$ 阶连续导数,

$$
\begin{aligned}
&f_1(\theta,\rho)=O(|\rho|), \text{当 } |\rho|\to 0,\\
&f_2(\theta,0)=0, \qquad\qquad (1.10)\\
&\frac{\partial f_2(\theta,0)}{\partial\rho}=0
\end{aligned}
$$

使得把变换(1.4)应用到方程(4), 当 $|\rho|\leqslant\delta$ 时得到等价系统

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}&=g(\theta)+f_1(\theta,\rho)+h'(\theta,\rho)F(t,u(\theta)+Z(\theta)\rho),\\
\dot{\rho}&=A(\theta)\rho+f_2(\theta,\rho)+B(\theta,\rho)F(t,u(\theta)+Z(\theta)\rho),
\end{aligned}
\qquad (1.11)
$$

这里 $g(\theta)$ 在(3)中给出。

VI.2. 周期轨道的稳定性

在这一节里, 讨论的情况是闭曲线 Γ 由(2)的非常数的以 ω 为周期的解 x^0 生成, 而 f 对 x 的一阶导数连续. 如同前面提到过的, 我们可以假定 Γ 的参数表示式是 $x=x^0(\theta)$, $0\leqslant\theta<\omega$; 即 u 可以取为x^0, 又满足(3), 这里, $0\leqslant\theta\leqslant\omega$ 时 $g(\theta)=1$. 由于 $f(x)$对 x 有连续的一阶导数, 故函数$u(\theta)$对 θ 有连续的二阶导数. 用局部坐标系(1.4)来说, (2)的解在 Γ附近的性态由微分系统

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}&=1+f_1(\theta,\rho),\\
\dot{\rho}&=A(\theta)\rho+f_2(\theta,\rho),
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

$$
A(\theta)=Z'(\theta)\left[-\frac{dZ(\theta)}{d\theta}+\frac{\partial f(u(\theta))}{\partial x}Z(\theta)\right]
$$

的解给出, 这里 $f_1(\theta,\rho)$, $f_2(\theta,\rho)$对 θ、ρ 连续, 对于 ρ 有连续的一阶导数, 对 θ 的周期为 ω. 这些函数满足(1.10); 即

$$
\begin{aligned}
&|f_1(\theta,\rho)|=o(|\rho|), \text{ 当 } |\rho|\to 0 \text{ 时},\\
&f_2(\theta,0)=0, \qquad\qquad (2.2)\\
&\frac{\partial f_2(\theta,0)}{\partial\rho}=0.
\end{aligned}
$$

与(2)的周期解$u(\theta)$相伴随的还有线性变分方程

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{\partial f(u(\theta))}{\partial x}y. \tag{2.3}$$

这个周期系数的线性系统总有非平凡的以ω为周期的解. 事实上, 由于(2)意味着$d^2u/d\theta^2=[\partial f(u(\theta))/\partial x]du/d\theta$, 故$du(\theta)/d\theta$是这个方程的非平凡的以$\omega$为周期的解. 所以, (2.3)至少有一个特征乘数等于一.

引理 2.1. 如果n维系统(2.3)的特征乘数是$\mu_1, \cdots, \mu_{n-1}, 1$, 则$n-1$维系统

$$\frac{d\rho}{d\theta}=A(\theta)\rho \tag{2.4}$$

的特征乘数是$\mu_1, \cdots, \mu_{n-1}$, 这里$A(\theta)$在(2.1)中给出.

证明 假设Z是(1.4)中定义的$n\times(n-1)$矩阵. 由于$v(\theta)$, $Z(\theta)$是一个移动标准正交系, 向量$du(\theta)/d\theta$和$Z(\theta)$的列向量是相互正交的. 于是, 对于任意的n维向量y, 有唯一确定的纯量β与$n-1$维向量ρ, 使得$y=\beta du(\theta)/d\theta+Z(\theta)\rho$. 如果$y$是(2.3)的一个解, 则利用$d^2u/d\theta^2=[\partial f(u(\theta))/\partial x]du/d\theta$与矩阵$(u, Z)$的列相互正交的事实, 直接推出$\rho$满足(2.4). 这说明线性变分方程解的法向分量与法向变差的线性变分方程的解重合.

现在假设$w^2, \cdots, w^n$是(2.3)的$n-1$个解, Y_1是由$Y_1=[w^2, \cdots, w^n]$定义的$n\times(n-1)$矩阵, 而$Y(\theta)=[du(\theta)/d\theta, Y_1(\theta)]$是(2.3)的一个基本矩阵解. 如果$K$由$Y(\omega)=Y(\theta)K$定义, 则$K$的特征值是(2.3)的特征乘数. 从$Y$的定义直接推出$K$的形状一定是

$$K=\begin{bmatrix}1 & K_2\\ 0 & K_1\end{bmatrix},$$

因此, 在引理中陈述的(2.3)的乘数$\mu_1, \cdots, \mu_{n-1}$是K_1的特征值. 如果$Y_1=[du/d\theta]\alpha+ZR$, 这里$\alpha=(\alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 又$R$是$(n-1)\times(n$

-1)矩阵，则由在这个证明开始处作的说明推知 R 是(2.4)的矩阵解，$R(\omega)=R(0)K_1$. 矩阵 $R(0)$是非奇异的. 事实上，如果存在一个 $n-1$ 维向量 c，使得 $R(0)c=0$，则 $Y_1(0)c-[du(0)/d\theta]\alpha c=0$. 由于 $Y(0)$是非奇异的，$R(\theta)$是(2.4)的基本矩阵解，而 K_1 是 R 的单值矩阵. 于是 K_1 的特征值是(2.4)的乘数，引理证毕.

让我们回忆前面关于稳定性的某些概念. 如果 M 是 R^n 内的一个集合，它的 η 邻域 $U_\eta(M)$是 R^n 内到 M 的距离小于 η 的 x 的集合. 设 M 是(2)的不变集. 如果对于任意 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，使得对于任意 $x^0\in U_\delta(M)$，(2)的解 $x(t,x^0)$对所有 $t\geqslant 0$ 在 $U_\varepsilon(M)$内，就说 M 是稳定的. 如果不变集 M 稳定，此外存在 $b>0$，使得对于任意 $x^0\in U_b(M)$，解 $x(t,x_0)$当 $t\to\infty$ 时趋于 M，就说 M 是渐近稳定的. 如果 $u(t)$是(2) 的非常数周期解，又由 u 生成的对应的不变闭曲线 Γ 相应为稳定、渐近稳定，就说周期解 $u(t)$ 是轨道稳定、渐近轨道稳定的. 如果周期解 $u(t)$ 渐近轨道稳定，又存在 $b>0$，使得对于任意到 Γ 的距离小于 b 的 x_0，有 $\tau=\tau(x_0)$，使得 $t\to\infty$ 时 $|x(t,x_0)-u(t-\tau)|\to 0$，就说$u(t)$是具有渐近位相地渐近轨道稳定的.

定理 2.1. 如果 f 在 $\mathscr{C}^1(R^n,R^n)$内，u 是(2)的非常数的以 ω 为周期的解，(2.3)的特征乘数中，1 是简单的，其他的模小于 1(特征指数的实部是负的)，则解 u 是具有渐近位相的渐近轨道稳定周期解.

证明 在 u 的轨道 Γ 的邻域内的解可以用方程(2.1)来描述. 由上面各假定与引理 2.1，推知(2.4)的特征乘数的模小于 1. 对于 Γ 的充分小邻域，即 ρ 充分小，在(2.1)中可以消去 t，使得(2.1)的第二个方程有形状

$$\frac{d\rho}{d\theta}=A(\theta)\rho+f_3(\theta,\rho), \tag{2.5}$$

这里 $f_3(\theta, \rho)$对 ρ 的一阶偏导数连续，$f_3(\theta, 0)=0, \partial f_3(\theta, 0)/\partial\rho=0$. 由定理Ⅱ.2.4与Ⅲ.7.2推知有 $K>0, \alpha>0, \eta>0$，使得对于$|\rho_0|<\eta$，(2.5)的满足 $\rho(\theta_0, \theta_0, \rho_0)=\rho_0$ 的解 $\rho(\theta, \theta_0, \rho_0)$满足

$$|\rho(\theta, \theta_0, \rho_0)|\leqslant Ke^{-\alpha(\theta-\theta_0)}|\rho_0|, \quad \theta\geqslant\theta_0. \tag{2.6}$$

这证明了Γ的渐近轨道稳定性.

方程 (2.5) 产生(2)在Γ附近的轨道. (2)在Γ附近的正确解由变换公式(1.4)和向量$(\theta(t), \rho(\theta(t), \theta_0, \rho_0))$求得，这里 $\rho(\theta, \theta_0, \rho_0)$满足(2.5)，而 $\theta(t)$是在(2.1)的第一个方程中用 $\rho(\theta, \theta_0, \rho_0)$代替 ρ 后满足 $\theta(t_0)=\theta_0$ 的解. 为了证明(2)的每个解伴随有一个渐近位相移动，只要说明当 $t\to\infty$ 时 $\theta(t)-t$ 趋于某个常数就行了. 如果 $\theta=t+\psi$，则

$$\dot\psi(t)=f_1(t+\psi, \rho(t+\psi, t_0+\psi_0, \rho_0)). \tag{2.7}$$

根据(2.2)，对于任意 $\eta>0$，存在 $L>0$，使得$|\rho|<\eta, 0\leqslant\theta<\omega$ 时，$|f_1(\theta, \rho)|\leqslant L|\rho|$. 选取 η_1 使得 $LK\eta_1<1/2$. 于是只要$|\rho|<K\eta_1$，就有$\dot\theta>1/2$; 特别对所有 $t\geqslant t_0$ 有 $\theta(t)\geqslant\theta_0$. 但是(2.6)就意味着对于所有 $|\rho_0|<\eta_1$, $t\geqslant t_0$ 有 $|\rho(\theta(t), \theta_0, \rho_0)|<K\eta_1$. 利用(2.6)，我们对于所有 $t\geqslant t_0$, $|\rho_0|<\eta_1$ 有

$$|f_1(t+\psi, \rho(t+\psi, t_0+\psi_0, \rho_0)|\leqslant LKe^{-\alpha(\psi-\psi_0)}e^{-\alpha(t-t_0)}|\rho_0|. \tag{2.8}$$

对于任意 $\beta>0$，选取$\eta_2\leqslant\eta_1$ 如此小，以致 $LKe^{\alpha\beta}\eta_2/\alpha<\beta$，又对于任意 t_0、ψ_0，考虑由把$[t_0, \infty)$映入 R 的这样的连续函数 ψ 所成的集合$\mathscr{G}(\beta, \eta_2)$每个 ψ 满足 $\psi(t_0)=\psi_0$，$t\geqslant t_0$时$|\psi(t)-\psi_0|\leqslant\beta$. 利用在 $\mathscr{G}(\beta, \eta_2)$的紧子集上的一致收敛拓扑. 对于任意 $\rho_0(|\rho_0|<\eta_2)$与任意 $\mathscr{G}(\beta, \eta_2)$中的 ψ，考虑映射

$$(T\psi)(t)=\psi_0+\int_{t_0}^{t} f_1(s+\psi(s), \rho(s+\psi(s), t_0+\psi_0, \rho_0))ds.$$

易见$(T\psi)(t_0)=\psi_0$, $t\geqslant t_0$时$|(T\psi)(t)-\psi_0|\leqslant\beta$. 因此，$T$: $\mathscr{G}(\beta,$

$\eta_2)\to\mathscr{G}(\beta,\eta_2)$、显然它是连续的. 此外,由于$(T\psi)(t)$对$t$可微,又(2.8)被满足,推知对于$\mathscr{G}(\beta,\eta_2)$中所有$\psi$,$|d(T\psi)(t)/dt|\leqslant\beta\alpha$,于是$T$是$\mathscr{G}(\beta,\eta_2)$入自身的完全连续映射. 利用Schauder-Tychonov定理,在$\mathscr{G}(\beta,\eta_2)$内$T$有不动点,它便是(2.7)在$\mathscr{G}(\beta,\eta_2)$内的一个解. 于是,(2.7)的所有解当$|\rho|<\eta_2$时有界.

还有,如果ψ是(2.7)的一个解,则对于所有$t,\tau\geqslant t_0$

$$|\psi(t)-\psi(\tau)|\leqslant\int_\tau^t KLe^{\alpha\beta}\eta_2 e^{-\alpha(t-t_0)}dt.$$

由于此式右边当$t,\tau\to\infty$时趋于零,推出ψ趋于某个常数. 定理2.1证毕.

习题 2.1. 举一个自治系统的例子,它有渐近轨道稳定的周期解,但是没有渐近位相.

定理 2.2. 如果u是(2)的非常数的以ω为周期的周期解,相应的(2.3)有$n-1$个特征乘数的模不等于一,则在(1)内闭轨道Γ有一个邻域W_Γ,又有两个集合S_Γ与U_Γ,使得$S_\Gamma\cap U_\Gamma=\Gamma$,且(2)的任意一个$t\geqslant0(t\leqslant0)$时留在$W_\Gamma$内的解必定落在$S_\Gamma(U_\Gamma)$上. 如果(2)的解$x$的初值在$S_\Gamma(U_\Gamma)$内,则$t\to\infty(t\to-\infty)$时$x(t)\to\Gamma$. 并且,如果(2.3)有$p(q)$个特征乘数的模$<1(>1)$,则$S_\Gamma(U_\Gamma)$是$p$维($q$维)球与圆的直积或广义 Möbius 带.

证明 在周期轨道Γ的邻域内,(2)的轨道由变换(1.4)与实微分方程(2.5)的解$\rho(\theta)$给出,由 Floquet 表示定理知(2.4)的主矩阵解可以表示成为$P(\theta)e^{B\theta}$,这里$P(\theta)$是周期为ω的周期矩阵. 并且,习题Ⅲ.7.2断言如果只要求P是周期为2ω的周期矩阵,$P(\theta)$总可以取为实的. 如果已这样地取定了P,把实变换$\rho=P(\theta)r$用到(2.5),产生等价的实系统

$$\dot r=Br+f_4(\theta,r),\tag{2.9}$$

这里$f_4(\theta,0)=0$, $\partial f_4(\theta,0)/\partial r=0$, $f_4(\theta,r)$对θ的周期为2ω,而

且 B 的特征值的实部不是零. 把定理 IV. 3. 1 用到(2. 9), 又利用变换 $\rho=P(\theta)r$,就可以直接推得定理的结论.

把 S_Γ 与 U_Γ 分别叫做周期轨道 Γ 的稳定流形与不稳定流形,这是合理的. 由定理 IV. 3. 1 还产生这样的结果:流形 S_Γ 与 U_Γ 有周期为 2ω 的周期参数表达式. 这些集合是否总可能有周期为 ω 的参数表达式呢?

我们举下面这个例子说明情况不是如此. 这个例子看起来复杂,但是如果着眼于它被编造出来的方式;也就是说从对于微分方程所要求的最后结果倒过来编出微分方程, 这个例子事实上就不复杂. 考虑方程

$$\begin{aligned}&(a)\quad \dot{r}=A(\theta)r,\\&(b)\quad \dot{\theta}=1,\end{aligned}\tag{2.10}$$

这里 $r=(r_1,r_2)$ 与 θ 通过

$$x=(r_1+1)\cos 4\pi\theta,$$

$$y=(r_1+1)\sin 4\pi\theta,$$

$$z=r_2$$

用 R^3 内的坐标 x, y, z 表示, 又

$$A(\theta)=2\begin{bmatrix}-\cos 4\pi\theta & \pi+\sin 4\pi\theta\\ -\pi+\sin 4\pi\theta & \cos 4\pi\theta\end{bmatrix},$$

$A(\theta+1/2)=A(\theta)$.

在 R^3 内, 存在周期为 1/2 的周期解, 相应的周期轨道 Γ 是 (x,y) 平面内中心在原点的半径为一的圆. 下面说明这个周期解有 Möbius 带状的稳定流形与不稳定流形.

方程(2. 10a)的主矩阵解是 $P(\theta)\exp B\theta$, 这里

$$P(\theta)=\begin{bmatrix}\cos 2\pi\theta & \sin 2\pi\theta\\ -\sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

矩阵 $A(\theta)$对 θ 的周期是 1/2, 而矩阵 $P(\theta)$对 θ 的周期却是 1. 并且易见主矩阵解不可能有这样的 Floquet 分解, 它有实的周期部分, 而同时周期是 1/2. 系统的特征乘数是 $P(1/2)\exp B$ 的特征值, 它们是 $-e^{-1}$, $-e$.

Γ的稳定流形与不稳定流形是

$$S_\Gamma=\Big\{(x,y,z): r=e^{-2\theta}(\cos 2\pi\theta, -\sin 2\pi\theta)a, 0\leqslant\theta<\frac{1}{2},$$
$$-a_0<a<a_0\Big\},$$
$$U_\Gamma=\Big\{(x,y,z): r=e^{2\theta}(\sin 2\pi\theta, \cos 2\pi\theta)b, 0\leqslant\theta<\frac{1}{2},$$
$$-b_0<b<b_0\Big\},$$

这里 a_0、b_0 是正的常数. 显然这些曲面是 Möbius 带, 因此不可能用 θ 的周期为 1/2 的周期函数的参数式来表示.

习题 2.2. 证明在定理 2.2 中Γ的稳定(不稳定)流形 $S_\Gamma(U_\Gamma)$的任意解当 $t\to\infty(t\to-\infty)$时必趋于 Γ, 且具有渐近位相.

VI.3. 二维系统中轨道稳定性的充分条件

考虑实的二维系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=X(x,y),\\ \dot{y}&=Y(x,y),\end{aligned}\tag{3.1}$$

这里 X, Y 与它们的一阶偏导数在 R^2 内连续. 假设 $x^0(t)$, $y^0(t)$ 是(3.1)的周期为ω的非常数周期解, 它在(x, y)平面内的轨道是 Γ. 这个解的线性变分方程是

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{\partial X}{\partial x}x+\frac{\partial X}{\partial y}y,\\ \dot{y}&=\frac{\partial Y}{\partial x}x+\frac{\partial Y}{\partial y}y,\end{aligned}\tag{3.2}$$

这里的函数在 $x^0(t)$, $y^0(t)$计值. 由引理 IV.7.3 知(3.2)的特征乘数的乘积是

$$\exp\left[\int_{\Gamma}(\partial X/\partial x+\partial Y/\partial y)dt\right].$$

由于 1 是(3.2)的特征乘数,这个指数式必是另一个乘数. 利用定理 2.1 与 2.2, 我们于是可以陈述下面这个关于Γ的稳定性与不稳定性的充分条件.

引理 3.1. 设 $x^0(t)$, $y^0(t)$ 是 (3.1) 的周期为ω的周期解. 如果

$$\int_0^{\omega}\left[\frac{\partial X(x^0(t),y^0(t))}{\partial x}+\frac{\partial Y(x^0(t),y^0(t))}{\partial y}\right]dt<0,$$

则(3.2)有一个乘数小于 1, 因之 $x^0(t)$, $y^0(t)$具有渐近位相地渐近轨道稳定. 如果这个积分是正的,则(3.2)有一个特征乘数大于 1,从而解不稳定.

为了说明这个引理的应用,考虑纯量方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0, \tag{3.3}$$

或等价系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-g(x)-f(x)y,\end{aligned} \tag{3.4}$$

这里f,g 与它们的一阶导数在R上连续,f 有若干个孤立零点.

如果 $E(x,y)=y^2/2+G(x)$, $G(x)=\int_0^x g(s)ds$, 则E沿着(3.4)的解的导数$\dot{E}$由

$$\dot{E}=-f(x)y^2=2f(x)[G-E] \tag{3.5}$$

给出.

如果$x(t)$ 是(3.3)的非常数解, 则不可能有 $\bar{t}$ 使得 $\dot{x}(\bar{t})=\ddot{x}(\bar{t})=0$. 事实上,如果确有这种$\bar{t}$,则$x^0=x(\bar{t})$将是 g 的一个零点,由唯一性将推知对所有 t 有 $x(t)=x^0$. 假设 $\dot{x}(\bar{t})=0$ 而 $\ddot{x}(\bar{t})\neq 0$.

于是 $x(t)$在 $\bar{t}$ 取局部极值，因之在 $\bar{t}$ 的某个邻域里 $x(t)$ 必大于或小于 $x(\bar{t})$. 由于$f(x)$的零点是孤立的，推知$f(x(t))$在 $\bar{t}$ 附近必是定号的，因此E在 $\bar{t}$ 不可能取极值.

如果Γ是由 (3.3) 的周期解 $x^0(t)$ 所确定的(3.4)的闭轨道，则在Γ上当 $t=\bar{t}$ 时E取极小值，而上面的说明意味着$f(x^0(\bar{t}))=0$, $y(\bar{t})=\dot{x}^0(\bar{t})\neq 0$. 因此，如果 $G(x^0(\bar{t}))=h$, 则对于所有 t 有 $E(t)>h$. 从(3.5)推知

$$\frac{\dot{E}}{E-h}+2f=\frac{2(G-h)f}{E-h},$$

在Γ上求积分，得到

$$\int_\Gamma f\,dt=\int_\Gamma \frac{(G-h)f}{E-h}dt. \tag{3.6}$$

从引理 3.1 与(3.4)这种特殊形式知轨道Γ的线性变分方程当(3.6)是正的时，有一个乘数<1, 当(3.6)是负的时，有一个乘数>1. 特别，如果对 $f(x)$的所有零点，$G(x)=h$, 又当 $f(x)\neq 0$ 时，$[G(x)-h]f(x)$是正的，这个乘数<1. 作为今后有用的一个特殊情形，我们陈述

引理 3.2. 如果 f, g 在R内有连续的一阶导数，又

(i) 当 $\alpha<x<\beta$ 时 $f(x)<0$, 当 $x<\alpha$, $x>\beta$ 且 $\alpha<0<\beta$ 时 $f(x)>0$,

(ii) 当 $x\neq 0$ 时 $xg(x)>0$,

(iii) $G(\alpha)=G(\beta)$, 这里 $G(x)=\int_0^x g(s)ds$,

则(3.4)的任何闭轨有一个特征乘数在(0, 1)内，因此具有渐近位相地渐近轨道稳定.

引理 3.2 的一个重要特例是 van der Pol 方程

$$\ddot{x}-k(1-x^2)\dot{x}+x=0, \quad k>0.$$

VI.4. 自治扰动

考虑方程系统

$$\dot{x}=f(x)+F(x,\varepsilon) \tag{4.1}$$

这里 $f:R^n\to R^n$, $F:R^{n+1}\to R^n$ 都是连续的. $F(x,\varepsilon)$对 x 有连续的偏导数，并且对所有 x, 有 $F(x,0)=0$. 如果系统(2)有非常数的周期解 $u(t)$, 周期为 ω, 轨道是 Γ, 则 u 的线性变分方程是

$$\dot{y}=\frac{\partial f(u(t))}{\partial x}y. \tag{4.2}$$

定理 4.1. 如果(4.2)的$n-1$个特征乘数$\mu_1,\cdots,\mu_{n-1}$都$\neq1$, 则存在一个 $\varepsilon_0>0$与Γ的一个邻域W, 使得$0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$时, 方程(4.1)有一个周期为 $\omega^*(\varepsilon)$的周期解 $u^*(\cdot,\varepsilon)$, $u^*(\cdot,0)=u(\cdot)$, $\omega^*(0)=\omega$, $u^*(t,\varepsilon)$与 $\omega^*(\varepsilon)$对于R内的 t 以及 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 都连续. 如果$\mu_1,\cdots,\mu_{n-1}$ 中没有一个是单位根，则 $u^*(\cdot,\varepsilon)$是(4.1) 在W内仅有的周期解. 如果$\mu_1,\cdots,\mu_n$ 的模都<1, 则 $u^*(\cdot,\varepsilon)$是具有渐近位相的渐近轨道稳定的周期解，如果有任何一个 μ_j 的模>1, 则 $u^*(\cdot,\varepsilon)$不稳定.

证明 由定理 1.2 与变换(1.4) 知系统(4.1) 等价于用上述 $F(x,\varepsilon)$代替 $F(t,x)$所得的系统(1.11). 在这些方程中消去 t, 得到系统

$$\frac{d\rho}{d\theta}=A(\theta)\rho+R(\theta,\rho,\varepsilon), \tag{4.3}$$

这里 $A(\theta)$, $R(\theta,\rho,\varepsilon)$是 θ 的周期为ω的函数, 而R在 $\mathscr{L}ip(\eta,M)$内, 这个 $\mathscr{L}ip(\eta,M)$在 IV.2 节中已予定义. 引理 2.1 意味着 $d\rho/d\theta=A(\theta)\rho$的特征乘数是数$\mu_1,\cdots,\mu_{n-1}$. 由定理IV.2.1 推知存在 $\varepsilon_0>0$, $\rho_0>0$, 当 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 时(4.3)有周期为ω的解 $\rho^*(\theta,\varepsilon)$, 它对 θ, ε 连续, $\rho^*(\theta,0)=0$, 并且它还是在$|\rho|<\rho_0$ 这个区域内仅有的周期为ω的解. 当$\mu_1,\cdots,\mu_{n-1}$ 的模都不是一时，定理 IV.3.1 产生关于 $\rho^*(\theta,\varepsilon)$的稳定性质的结论. 在(1.11)的第一个方

程中用这个 $\rho^*(\theta,\varepsilon)$，令其满足 $\theta(0)=0$的解为 $\theta(t)$，可以得知当 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 时有唯一的连续的 $\omega^*(\varepsilon)$，$\omega^*(0)=\omega$，使得 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 时 $\theta(\omega^*(\varepsilon))=\omega$. 由函数 $\theta(t)$，$\rho^*(\theta(t),\varepsilon)$与变换(1.4)产生所需要的(4.1)的周期解以及如定理中所陈述的稳定性质.

现在假设 $\mu_j(j=1,2,\cdots,\ n-1)$ 都不是单位根. 对于任意的整数 k，(2)的周期解 u 有周期 $k\omega$，因此在上面的证明中方程中的所有函数可以当作 θ 的周期为 $k\omega$ 的周期函数. 由于定理 Ⅳ.2.1 关于 μ_j 的假定意味着(4.3)对 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 有周期为 $k\omega$ 的周期解，这个解在区域 $|\rho|<\rho_0$ 内是唯一的. 因此，这个解必是上面给出的 $\rho^*(\theta,\varepsilon)$. 但是，(4.1)的落在 Γ 的充分小邻域内的任意周期解 x 必定定义 R^n 内的闭曲线，它的参数表达式是 $x=u(\theta)+Z(\theta)\times\rho(\theta,\ \varepsilon)$，这里 $\rho(\theta,\ \varepsilon)$是(4.3)的周期为 $k\omega$(k 为某整数)的周期解. 这就证明了定理.

对于 $F\equiv 0$，我们得到有趣的

推论 4.1. 如果(4.2)的 $n-1$ 个特征乘数 $\mu_1,\cdots,\mu_{n-1}$ 中没有一个是单位根，则

$$\dot{x}=f(x)$$

的周期轨道 Γ 是孤立的.

习题 4.1. 假设 $g(x,y)$对 x,y 的一阶导数连续. 试证明存在一个 $\varepsilon_0>0$，使得方程

$$\ddot{x}-k(1-x^2)\dot{x}+x=\varepsilon g(x,\dot{x}),\quad k>0,$$

在 van der Pol 方程

$$\ddot{x}-k(1-x^2)\dot{x}+x=0$$

的唯一周期轨道的邻域内有唯一周期解. 你能证明这个轨道是整体渐近轨道稳定的吗？

习题 4.2. 举一个自治系统 $\dot{x}=f(x)$的例子，它有一个以 ω 为周期的轨道 Γ，此轨道的线性变分方程以 1 为单乘数，而在 Γ 的

任意邻域里，还有另外的周期轨道.

习题 4.3. 对于一个方程 $\dot{x}=f(x)$，能否有一个孤立的以 ω 为周期的轨道 Γ，其线性变分方程以 1 作为单乘数，而还有一个扰动 $\epsilon g(x)$ 使得在 Γ 的任意邻域内，有多于一个周期轨道？

VI.5. 对进一步学习的说明与建议

在第 1 节给出的移动标准正交系的特殊结构，是建立在 Urabe[1] 中对闭曲线 Γ 是周期轨道的情形给出的描述的基础之上的. 用坐标系来得在 Γ 的邻域内等价于 (4) 的微分方程组的方式却是不同的. 由于 Urabe 只讨论周期轨道的情形，就能得到法向变差关于 t 的显式方程，而不像(1.11)是关于 θ 的显式方程. 引理 1.1 是 Diliberto 与 Hufford[1] 给出的. 引理 3.2 归于 Coppel [1, 第 86 页]. Poincaré 对于解析系统已知道了稳定性定理 2.1.

一般地说，当(2.3)的特征乘数有多于一个的模等于 1 时，很难讨论在轨道邻域内(2)的解的性态. Hale 与 Stokes[1] 给出了下述结果. 如果系统(1)有一个含 k 个参数的周期解族，则线性变分方程有 k 个特征乘数等于一. 如果其它乘数的模小于一，则此族中每个轨道稳定，而且事实上(2)的接近此族的解具有渐近位相地渐近趋向此族中的一条轨道.

具有 k 个参数的周期解族的非线性系统的自治扰动是极难研究的，在 Urabe 的书[1]中用很大篇幅讨论了它. 在下一章，将假定线性变分方程只有一个乘数的模为一，来讨论(2)的非自治扰动的周期轨道附近的解的性态. 如果非自治扰动当 t 大时是“小”的；即系统是“渐近”自治的，则可以讨论非自治方程与自治方程的所有解之间的定性关系，而不要对自治方程的解作任何假定（见 Markus[1], Opial[1], Yoshizawa[1]). 关于 k 个参数的周期解族的非自治扰动，可看 Hale 与 Stokes[1], Yoshizawa 与 Kato[1].

第 VII 章　含有小参数的方程的积分流形

假定第 VI 章的系统(2)有不变集合，它是一条光滑的 Jordan 曲线(记作Γ)．在第 VI 章中说明了，通过变换可以把研究(2)的扰动方程（即第 VI 章的系统（4））的解在Γ附近的特性，化为研究方程

$$\dot{\theta}=g(\theta)+\Theta(t,\theta,\rho),$$
$$\dot{\rho}=C(\theta)\rho+R(t,\theta,\rho),$$

这里的ρ表示从Γ算起的法向变差，$g(\theta)$表示未被扰动方程的解在Γ上的性态．如果$g(\theta)\equiv 1$，曲线Γ便对应于周期轨道．如果g在某点等于 0，在Γ上就有平衡点．

当$g(\theta)\equiv 1$且扰动不依赖于t时，在第 VI 章中已对上述方程给出了若干结论．由于此时问题可化为研究某个非自治系统在平衡点附近的特性，分析起来就特别简单．另一方面，如果Θ，R显含t，那就不能化为这种局部问题，这是因为即使$g(\theta)\equiv 1$，也不一定能从方程消去t．应该研究在不变集附近的性态．如果$g(\theta)$在某个θ取零值，那么即使Θ，R不依赖于t，问题也仍然是非局部的．在这种情况下，还出现了另外的困难，我们稍迟将讨论它．

本章的目的是对比上面的方程要一般些的系统来研究这种非局部问题．比较具体地说，我们将注意形如

$$\begin{aligned}\dot{\theta}&=\Theta^*(t,\theta,x,y,\varepsilon)=w(t,\theta,\varepsilon)+\Theta(t,\theta,x,y,\varepsilon),\\ \dot{x}&=A(\theta,\varepsilon)x+F(t,\theta,x,y,\varepsilon),\\ \dot{y}&=B(\theta,\varepsilon)y+G(t,\theta,x,y,\varepsilon)\end{aligned}\qquad(1)$$

的方程组，其中(ε,θ,x,y)是$R\times R^k\times R^n\times R^m$中的点；$A(\theta,\varepsilon)$与$B(\theta,\varepsilon)$是这样的矩阵，对于某类函数$\theta(x)$，方程$\dot{x}=A(\theta,\varepsilon)x$的解

当 $t\to\infty$ 时按指数方式趋向于 0, $\dot{y}=B(\theta, \varepsilon)y$ 的解当 $t\to-\infty$ 时按指数方式趋向于 0; F, G, Θ 在某种意义下, 对于小的 x, y, ε 而言充分小. 稍晚一些我们将把这些叙述得更具体一些.

虽然将假定(1)中的函数对于紧集中的 x, y 而言是有界的, 但不假定它们对于向量 θ 而言是周期的. 在具体应用中, 经常遇到 (1) 中所出现的都是 θ 的周期函数这种特殊情况. 当研究微分方程在不变环附近的局部扰动时, 就自然地出现这种问题. 在许多重要情况下, 不变环上的流是平行的(即所有的解是周期的或拟周期的函数), 因而方程(1)中的 $w(t, \theta, \varepsilon)$ 是常向量. 如果方程(1)产生于周期轨道的局部扰动理论, 那么 θ 是纯量, w 是常数, 而根据周期系统的 Floquet 理论, 可以把矩阵 $A(\theta,\varepsilon)$, $B(\theta,\varepsilon)$ 取得不依赖于 θ. 而对于具有平行流的不变环的一般扰动理论来说, 矩阵 $A(\theta, \varepsilon), B(\theta, \varepsilon)$ 不能取得不依赖于 θ, 这是因为对于一般的殆周期系统没有 Floquet 理论. 第 8 节的习题说明了产生出型 (1) 的方程的许多方式.

定义 1. 设对于 (z, t) 空间的曲面 S 上的任意点 P, 常微分系统 $\dot{z}=Z(z, t)$ 通过它的解为 $z(t)$. 如果在 $z(t)$ 的定义域内, $(z(t), t)$ 总在 S 上, S 就是这个系统的一个积分流形.

本章的兴趣在于确定在什么意义下系统 (1) 的解的定性性态与系统

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}&=w(t, \theta, 0),\\
\dot{x}&=A(\theta, 0)x, \qquad\qquad (2)\\
\dot{y}&=B(\theta, 0)y
\end{aligned}
$$

的相同. 系统(2)在 $R\times R^k\times R^n\times R^m$ 内有一个积分流形 S, 它的参数表达式是

$$S=\{(t, \theta, x, y): x=0, y=0\}.$$

此外, 按照以前提到过的稳定性质, 流形 S 具有与它相伴随的

鞍点结构. 事实上, (2) 有一个当 $t\to\infty$ 时趋于 S 的 $R\times R^k\times R^m$ 空间的解流形, 有一个当 $t\to-\infty$ 时趋于 S 的 $R\times R^k\times R^m$ 空间的解流形. 人们凭直观期待, 由于 ε、x、y 小时 Θ, F 与 G 充分小, 因之(1)有积分流形 S_ε, 当 ε 小时 S_ε 靠近(2) 的积分流形 S, 并且与 S 有相同的稳定性质.

因而在本章中, 我们确定 Θ, F, G 所应满足的条件, 以保证(1)有形如 $x=f(t,\theta,\varepsilon), y=g(t,\theta,\varepsilon), (t,\theta)\in R\times R^k$ 的, 并且当 $\varepsilon=0$ 时变为 $x=0$, $y=0$ 的积分流形. 在这种特殊情况下, 如果函数组

$$[\theta(t)=\theta(t,\theta_0,t_0),\ \ x(t)=f(t,\theta(t),\varepsilon),$$
$$y(t)=g(t,\theta(t),\varepsilon)],$$

对于 R 中每一个 t_0 与 R^k 中每一个 θ_0, 都是(1)的解, 前面的曲面是(1)的积分流形.

第 1 节的内容是历史地、直观地讨论确定(1)的积分流形所涉及的问题以及可能的解决方案. 第 2 节叙述主要的定理, 它们的证明在第 3、4、5、6 节. 在第 7 节里, 把第 2 节的结果用到具有周期轨道的方程的扰动方程, 还把第 V 章的平均法引伸到对(1)的 t 与 θ 求平均. 第 8 节的习题比较完全地说明了本章结论的意义.

VII.1. 确定积分流形的方法

这一节专用于直观地讨论积分流形以及某些已经证明在确定积分流形时是成功的方法. 为了讨论, 我们选取扰动一个自治系统

$$\dot{x}=X(x) \tag{1.1}$$

的问题, 假定它有一个非常数的以 ω_0 为周期的解 $u(t)$, 使得线性变分方程

$$\dot{y}=\frac{\partial X(u(t))}{\partial x}y \tag{1.2}$$

的 $n-1$ 个特征指数有负实部. 如同我们已在第 VI 章中看到的，这意味着由 u 描出的轨道是渐近稳定的，而这又意味着柱面

$$S=\{(t,x):x=u(\theta),0\leqslant\theta\leqslant\omega_0,-\infty<t<\infty\} \tag{1.3}$$

在(t, x) 空间里是渐近稳定的. 柱面 S 是 (1.1) 在 $R\times R^n$ 内的一个积分流形.

如果我们引进第 VI 章中的坐标系

$$x=u(\theta)+Z(\theta)\rho, \tag{1.4}$$

则在 S 的邻域内，方程的解由

$$\begin{aligned}\dot{\theta}&=1+\Theta(\theta,\rho),\\ \dot{\rho}&=A(\theta)\rho+R(\theta,\rho)\end{aligned} \tag{1.5}$$

来描述，这里当 $|\rho|\to 0$ 时 $\Theta(\theta,\rho)=O(|\rho|)$, $R(\theta,\rho)=O(|\rho|^2)$, 所有函数对 θ 以 ω_0 为周期, 又 $d\rho/d\theta=A(\theta)\rho$ 的特征指数的实部是负的. 根据 Floquet 理论, 这个线性方程的一个基本解组形如 $P(\theta)e^{B\theta}$, $P(\theta+\omega_0)=P(\theta)$. 如果我们设

$$\rho(t)=P(\theta)z(t),$$

又利用 $\dot{\theta}=1+O(|\rho|)$这个事实，便得到一个等价系统

$$\begin{aligned}\dot{\theta}&=1+\Theta_1(\theta,z),\\ \dot{z}&=Bz+Z(\theta,z),\end{aligned} \tag{1.6}$$

这里当 $|z|\to 0$ 时 $\Theta_1(\theta,z)=O(|z|)$, $z(\theta,z)=O(|z|^2)$, 又 B 的特征值都是负实部的.

为了作直观的解说, 我们需要下述在第 X 章将予证明的结果

引理 1.6. 存在正定矩阵 C, 使得线性系统 $\dot{z}=Bz$ 的初始值在椭圆 $z'Cz=c>0$(c 为常数)上的解, 当时间增加时必进入此椭圆内部. 在引理 X.1.6 中指出矩阵 $C=\int_0^\infty e^{B't}e^{Bt}dt$ 具备这些理想的性质. 由于$|z|\to 0$ 时 $Z(\theta,z)=O(|z|^2)$, 存在 $c_0>0$ 充分地小, 使得(1.6)的任何初始值在集合

$$U_s(c)=\{(t,x):x=u(\theta)+Z(\theta)P(\theta)z,\ 0\leqslant\theta\leqslant\omega_0,\ z'Cz=c,$$
$$-\infty<t<\infty\},$$
$$0<c\leqslant c_0$$

上的解，当 t 增加时必进入此集合(因此继续留在此集合内侧)．集合 $U_s(c)$ 在 x 空间的射影是围绕闭曲线

$$\mathscr{C}=\{x:x=u(\theta),\quad 0\leqslant\theta\leqslant\omega_0\}$$

的管道，在二维时，它是围绕 $\mathscr{C}$ 的环．此时几何关系很简单，$U_S(c)$ 表示在 S 内侧的一个柱面与在 S 外侧的一个柱面．

现在，若原来的微分方程(1.1)被扰动成

$$\dot{x}=X(x)+\varepsilon X^*(t,x)\tag{1.7}$$

的形状，这里 $X^*(t,x)$ 在 S 的某邻域内有界，则对于给定的 $c>0$ 与充分小的 ε，当时间增加，解仍将进入 $U_S(c)$．因此，对于固定的 $c>0$，我们希望对于小的 ε 在 $U_S(c)$ 内有某种积分曲面，它们看起来相似于柱面．然而，即令这种曲面存在，我们也不能期望在这个曲面上解的性态相似于在原来的 S 上解的性态，这是因为这些解没有伴随着强的稳定性质．正因为如此，我们讨论集合 S 的结构与稳定性质的保存，而不讨论 S 上一个特解的任何这种性质的保存．

现在列举若干能断言被扰动系统的积分流形的存在性的方法．如果把变换(1.4)用到(1.7)，得到等价方程

$$\begin{aligned}\dot{\theta}&=1+\Theta(\theta,\rho)+\varepsilon\Theta^*(t,\theta,\rho),\\ \dot{\rho}&=A(\theta)\rho+R(\theta,\rho)+\varepsilon R^*(t,\theta,\rho).\end{aligned}\tag{1.8}$$

方法 1．(Krylov-Bogoliubov-Mitropolski)．约在 1934 年，Krylov 与 Bogoliubov 对于这个问题作出了一个要重的贡献，方式如下．他们通过微分方程(1.8)定义映“柱面”成“柱面”的映射，使得这个映射的不动点是方程的积分流形，当 $\varepsilon=0$ 时它化为 S．他们还讨论了这个流形的稳定性质．这些方法不用与扰动项对于

t 的依赖关系有关的任何特殊性质．由于我们将在下面详细讨论它，这里我们先说另外一些将不予进一步讨论的方法．

方法 2．(Levinson-Diliberto)．如果我们假定扰动项对 t 的周期为 ω_1，则由上面对稳定性的几何意义的讨论，使人们能按下述方式通过微分方程 (1.7) 得到一个环域映射．设 $U_{S\tau}(c)$ 是 $U_S(c)\cap\{t=\tau\}$；即 $U_S(c)$ 在 $t=\tau$ 的截口，实际上所有这些截口相同，都等于 $U_{S0}(c)$．如果 $x(t, x_0)$ 是被扰动方程 (1.7) 在 $t=0$ 的初始值是 x_0 的解，又 ε 充分小，则对于任意 $\tau>0$，函数 $x(\tau, \cdot)$ 是由 $U_{S0}(c)$ 入 $U_{S\tau}(c)=U_{S0}(c)$ 内部的映射；即由 $U_{S0}(c)$ 入自身的映射．由于曲线 $\mathscr{C}$ 的强稳定性质与解绕此曲线"旋转"的事实，人们猜测存在一条曲线 $\mathscr{C}_{t\tau}$ 使得 $x(\tau, \mathscr{C}_{t\tau})=\mathscr{C}_{t\tau}$ 与 $\mathscr{C}_{0\tau}=\mathscr{C}$．如果这是真的，又如果取 τ 为 ω_1，则方程的周期性意味着对于每个整数 k 有 $x(k\omega_1, \mathscr{C}_{t\omega})=\mathscr{C}_{t\omega}$．由于考虑由 $\mathscr{C}_{t\omega}$ 引出的所有解生成的"柱面"，我们求得方程的一个不变流形．在这种情况下，柱面上的解可以用环面上一个方程的解来描述，此环面由使柱面在 $t=0$ 与 $t=\omega_1$ 的截口相重合得到．这个想法的基础是Levinson 1950 年在一篇漂亮的文章中提出来并加以发挥的．利用 Levinson 证明的想法，Diliberto 与他的同事们大大简化与改进了 Levinson 的工作，并且讨论了更为复杂类型的积分流形．事实上，如果(1.7)的扰动项 X^* 是任意的拟周期函数，则它可以写成形式 $F(t, t, \cdots, t, x)$，函数 $F(t_1, t_2, \cdots, t_p, x)$ 对 t_j 的周期是 ω_j, $j=1, 2, \cdots, p$. (1.8) 的 Θ^*, R^* 对 t 有同样的周期性结构．人为地引进变量 ζ_j 使得 $\dot{\zeta}_j=1$，从(1.8)我们得到系统

$$
\begin{aligned}
&\dot{\zeta}_j=1,\quad j=1, 2, \cdots, p,\\
&\dot{\theta}=1+\Theta(\theta, \rho)+\varepsilon P^*(\theta, \zeta, \rho),\\
&\dot{\rho}=A(\theta)\rho+R(\theta, \rho)+Q^*(\theta, \zeta, \rho),
\end{aligned}
$$

这里 $P^*(\theta, \zeta, \rho)$, $Q^*(\theta, \zeta, \rho)$, $\zeta=(\zeta_1, \cdots, \zeta_p)$ 对 θ 与 ζ 是周期函

数．这是(1)的特殊情形，(1)的 θ 在这里是由上面的纯量 θ 与 p 维向量 ξ 所组成的 $p+1$ 维向量．请注意方程不再显含 t．Dilib-erto 通过推广周期映射的概念引进一种精巧的方法来讨论这些方程的积分流形．有兴趣的读者可以参阅这个方法及应用的详细参考文献．

方法 3．(偏微分方程)．假设有系统

$$\begin{aligned} &(a) \qquad \dot{\theta}=w(\theta)+\Theta(\theta,x), \\ &(b) \qquad \dot{x}=A(\theta)x+F(\theta,x), \end{aligned} \tag{1.9}$$

这里 θ 在 R^k 内，x 在 R^n 内，都是向量，又所有函数对 θ 有向量周期 ω．如果

$$S=\{(\theta,x):x=f(\theta),f(\theta+\omega)=f(\theta),\theta \text{ 在 } R^k \text{ 内}\}$$

是这个方程的一个积分流形，则 $x(t)=f(\theta(t))$ 必满足(1.9b)，这里 $\theta(t)$ 是

$$\dot{\theta}=w(\theta)+\Theta(\theta,f(\theta)) \tag{1.10}$$

的一个解．求微商，我们发现 f 必满足偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}[w(\theta)+\Theta(\theta,f)]-A(\theta)f=F(\theta,f), \tag{1.11}$$

$$f(\theta+\omega)=f(\theta).$$

现在这个方法还没有被完整地发展，但是 Sacker 已经开了一个头．w、A 不依赖于 θ 的情形用此方法不太难解决，这是由于可以沿着特征求积分，得到与下面提供的实质上相同的方法．如果有 θ 值使 $w(\theta)=0$，则由于解一般不像方程系数那样光滑，问题比较困难．光滑性质以难于处理的方式依赖于 w、A．在这个问题中出现的另一个困难是通常的迭代手续导致可微性的损失．为了绕过这个困难，Sacker 在每步迭代中解椭圆型方程

$$\mu\Delta_\theta f+\frac{\partial f}{\partial\theta}[w(\theta)+\Theta(\theta,f)]-A(\theta)f=F(\theta,f),$$

$$f(\theta+\omega)=f(\theta),$$

其中 μ 甚小, Δ_θ 是 Laplace 算子. 于是解有所希望的那么多阶的导数,不过为了求得原方程一个解, 在选取 $u\to 0$ 的方式时要作仔细的分析.对这个方法需要作的进一步的研究是要看看,当干扰项按一般方式依赖于 t 时是否可能求得结果, 还要讨论流形的稳定性质.

Ⅶ.2. 陈述结果

在这一节里,我们详细地给出关于(1)的积分流形的存在性与稳定性的结果. 设

$$\Omega(\sigma,\varepsilon_0)=\{x,y,\varepsilon):|x|<\sigma,\ |y|<\sigma,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\}.$$

将要用到关于(1)中函数的下列假设:

(H_1) 所有函数 A,B,w,Θ,F,G 在 $R\times R^k\times\Omega(\sigma,\varepsilon_0)$ 内连续与有界.

(H_2) 对于 $0\leqslant\rho\leqslant\sigma$, $0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$, 这些函数在 $R\times R^k\times\Omega(\rho,\varepsilon_1)$内对 θ 满足 Lipschitz 条件, Lipschitz 常数分别是 $r(\varepsilon_1)$, $r(\varepsilon_1)$, $L(\varepsilon_1)$, $\eta(\rho,\varepsilon_1)$, $\gamma(\rho,\varepsilon_1)$, $\gamma(\rho,\varepsilon_1)$, 这里 $r(\varepsilon_1)$, $L(\varepsilon_1)$, $\eta(\rho,\varepsilon_1)$, $\gamma(\rho,\varepsilon_1)$连续与非降.

(H_3) 对于 $0\leqslant\rho\leqslant\sigma$, $0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$, 函数$\Theta,F,G$ 在 $R\times R^k\times\Omega(\rho,\varepsilon_1)$内对 x, y 满足 Lipschitz 条件, Lipschitz 常数分别是 $\mu(\rho,\varepsilon_1)$, $\delta(\rho,\varepsilon_1)$, $\delta(\rho,\varepsilon_1)$, 这里 $\mu(\rho,\varepsilon_1)$, $\delta(\rho,\varepsilon_1)$连续与非降.

(H_4) 对于 $R\times R^k$ 内的(t,θ), $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, 函数$|F(t,\theta,0,0,\varepsilon)|$, $|G(t,\theta,0,0,\varepsilon)|$有界 $N(\varepsilon)$, 它在 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时连续与非降.

(H_5) $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, 存在正的常数$K$与连续的正函数 $\alpha(\varepsilon)$, 使得对于定义在$(-\infty,\infty)$上的任意连续函数 $\theta(t)$与任意实数 τ,

$$\dot{x}=A(\theta(t),\varepsilon)x,\quad \dot{y}=B(\theta(t),\varepsilon)y$$

的主矩阵解 $\Phi(t,\tau)$, $\Psi(t,\tau)$分别满足

$$|\Phi(t,\tau)|\leqslant Ke^{-\alpha(\varepsilon)(t-\tau)},\quad t\geqslant\tau,$$
$$|\Psi(t,\tau)|\leqslant Ke^{\alpha(\varepsilon)(t-\tau)},\quad t\leqslant\tau. \tag{2.1}$$

(H_6) 设 $p(\Delta, D, \varepsilon)$, $q(\Delta, D, \varepsilon)$ 由

$$p(\Delta,D,\varepsilon)=\gamma(D,\varepsilon)+\delta(D,\varepsilon)\Delta+\frac{k\gamma(\varepsilon)}{\alpha}[\delta(D,\varepsilon)D+N(\varepsilon)],$$
$$q(\Delta,D,\varepsilon)=L(\varepsilon)+\eta(D,\varepsilon)+\mu(D,\varepsilon)\Delta \tag{2.2}$$

定义，又假定 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时

$$(a)\quad \alpha(\varepsilon)-q(\Delta,D,\varepsilon)>0,$$
$$(b)\quad \delta(D,\varepsilon)D+N(\varepsilon)<\alpha(\varepsilon)D/K,$$
$$(c)\quad Kp(\Delta,D,\varepsilon)<[\alpha(\varepsilon)-q(\Delta,D,\varepsilon)]\Delta, \tag{2.3}$$
$$(d)\quad \frac{p(\Delta,D,\varepsilon)\mu(D,\varepsilon)}{\alpha(\varepsilon)-q(\Delta,D,\varepsilon)}+\delta(D,\varepsilon)<\frac{\alpha(\varepsilon)}{2K}.$$

现在我们能够陈述

定理 2.1. 如果系统(1)满足假设(H_1)—(H_6)，则在R^n，R^m内分别有函数 $f(t,\theta,\varepsilon)$, $g(t,\theta,\varepsilon)$, 它们在 $R\times R^k\times(0,\varepsilon_1)$内连续，以 D 为绝对值的上界，对 θ 满足 Lipschitz 条件, Lipschitz 常数为 Δ, 使得集合

$S_\varepsilon=\{(t,\theta,x,y): x=f(t,\theta,\varepsilon), y=g(t,\theta,\varepsilon), (t,\theta)$ 在 $R\times R^k$ 内$\}$

是(1)的一个积分流形。如果(1)中的函数对 θ 有向量周期 ω，则 $f(t,\theta,\varepsilon)$, $g(t,\theta,\varepsilon)$ 也对 θ 有向量周期 ω。如果(1)中的函数对 t 的周期为 T, 则 $f(t,\theta,\varepsilon,)$, $g(t,\theta,\varepsilon)$ 对 t 的周期也为 T. 如果(1)中的函数对 t 为殆周期函数, 则 f, g 也如是.

在证明这个定理之先，我们叙述某些直接推论，由于它们在应用中的重要性，我们也陈述为定理。

定理 2.2. 假设系统(1)甚至对 $\varepsilon=0$ 都满足(H_1)—(H_6)而 $\alpha(\varepsilon)=\alpha$($\alpha$ 为常数). 如果 $\eta(0,0)=\gamma(0,0)=\delta(0,0)=N(0)=0$, 又 $\alpha-L(0)>0$, 则存在 $\varepsilon_1>0$ 与 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 上的连续函数 $D(\varepsilon)$,

$\Delta(\varepsilon)$，当 $\varepsilon\to 0$ 时它们趋于零，使得定理 2.1 的结论对这 $D(\varepsilon)$，$\Delta(\varepsilon)$ 正确.

证明 根据定理 2.2 的假设，$\alpha-L(0)>0$. 因此我们可取 ε_0 以致 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时 $\alpha-L(\varepsilon)>0$. 由于 $\eta(0,0)=0$，存在正数 ε_1, Δ_1，D，使得(2.3a)当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$，$\Delta\leqslant\Delta_1$，$D\leqslant D_1$ 时满足. 由于 $\delta(0,0)=0$ 与 $N(0)=0$，推知可以进一步限制 ε_1 与选取 $D(\varepsilon)$，使得 $q\to 0$ 时 $D(\varepsilon)\to 0$，而 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时(2.3b)被满足. 由于 $\gamma(0,0)=0$，$\delta(0,0)=0$，推知 ε_1 与 $\varepsilon\to 0$ 时趋于零的函数 $\Delta(\varepsilon)$ 可以这样来选取，以致 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时(2.3c)被满足. 如果 $\Delta(\varepsilon)$，$D(\varepsilon)$ 按照上面所选取的，则 $\varepsilon\to 0$ 时 $p(\Delta(\varepsilon), D(\varepsilon), \varepsilon)$，$\delta(D(\varepsilon),\varepsilon)\to 0$，由此推知可以进一步限制 $\varepsilon_1>0$ 使得 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时 (2.3d)满足. 因此可用定理 2.1 证完定理 2.2.

如果(1)中的 $w(t,\theta,\varepsilon)$ 是一个常数，则 $L=0$，而根据(H_5)条件 $\alpha-L>0$ 自动满足. 定理 2.2 中的假设 (H_1)—(H_4)只不过表示关于扰动函数 Θ, F, G 的光滑性与微小性的条件.

考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{\theta}&=w+q\Theta(t,\theta,x,y,\varepsilon),\\ \dot{x}&=\varepsilon A(\theta)x+\varepsilon F(t,\theta,x,y,\varepsilon),\\ \dot{y}&=\varepsilon B(\theta)y+\varepsilon G(t,\theta,x,y,\varepsilon),\end{aligned}\tag{2.4}$$

这里 w 是常数.

定理 2.3. 假设系统 (2.4) 中的 A, B, w, Θ, F, G 甚至对于 $\varepsilon=0$ 与 $\gamma(0,0)=\delta(0,0)=N(0)=0$ 都满足假设(H_1)—(H_4). 如果在(H_5)中 $\alpha=\varepsilon\alpha_1$，$\alpha_1>0$ 为常数，又 $\alpha_1-\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\eta(0,\varepsilon)>0$，则定理 2.2 的结论对于系统(2.4)正确.

证明 由于方程(2.4)的形状意味着 ε 是(2.3)中所有函数的公因子，故只要说明 $L=0$ 且用 α_1 代替 $\alpha(\varepsilon)$ 时满足关系(2.3)就够了. 现在证明恰如定理 2.2 的证明那样进行.

考虑系统

$$\begin{aligned}
\varepsilon\dot{\theta} &= w+\Theta(t,\theta,x,y,\varepsilon),\\
\varepsilon\dot{x} &= A(\theta)x+F(t,\theta,x,y,\varepsilon),\\
\varepsilon\dot{y} &= B(\theta)y+G(t,\theta,x,y,\varepsilon),
\end{aligned}\tag{2.5}$$

这里 w 是一个常数.

定理 2.4. 假设系统(2.5) 中的 A, B, w, Θ, F, G 甚至对 $\varepsilon=0$ 都满足(H_1)—(H_4),而$\gamma(0,0)=\delta(0,0)=N(0)=0$.如果在$(H_5)$中 $\alpha=\alpha_1/\varepsilon$, $\alpha_1>0$ 为常数, 又 $\alpha_1-\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\eta(0,\varepsilon)>0$, 则定理 2.2 的结论对系统(2.5)正确.

证明 实质上与定理 2.3 的证明相同.

为了说清楚基本思想, 将把定理 2.1 的证明分成若干简单步骤来作. 其中某些步骤本身是有意义的, 将叙述成引理. 至于牵涉到由系统(1), (24)与(25)组合而成的系统的积分流形的结果, 可以用与下面给出的证明相同的方法来陈述. 这些结果当需要时容易得到, 看来不值得详细叙述它们.

VII. 3. 一个"非齐次线性"系统

在定理 2.1 的证明中, 我们将利用逐次逼近法, 其方式与在第 IV 章中用来得到在平衡点附近的性态时很相似. 设

$$S^n=\{f:(-\infty,\infty)\times R^k\to R^n, \text{它连续且有界}\}.$$

对于任意 $f\in S^n$, 定义

$$\|f\|=\sup\{|f(t,\theta)|, (t,\theta)\in R\times R^k\}.$$

在(1)中对于一个积分流形的逐次逼近的概念是设 $x=f(t,\theta)$, $f\in S^n$, $y=g(t,\theta)$, $g\in S^m$, 代入(1)的第一个方程, 得到一个只含 θ 的方程, 比方说是 $\dot{\theta}=h(t,\theta,f,g)$. 由这个方程可以解出 $\theta(t,\tau,\zeta,f,g)$, 这里对任意$(\tau,\zeta)\in R\times R^k$ 有 $\theta(\tau)=\zeta$. 于是把这个函数θ代入(1)的第二、三个方程, 得到形如

$$\dot{x}=A(\theta(t))x+\hat{f}(t,\theta(t)),$$
$$\dot{y}=B(\theta(t))y+\hat{g}(t,\theta(t))$$

的方程，这里 $\hat{f},\hat{g}$ 依赖于 f，g，更重要的是依赖于 $\theta(t)$的初始数据，即 τ,ζ. 于是问题在于确定这个系统的作为$(\tau,\ \zeta)$的函数的有界解.

于是，我们引出了一类"非齐次线性"系统. 我们这样来称呼这些方程，是因为在迭代过程中的每一步，它们都是 x,y 的线性方程；也就是说，对于定义积分流形的坐标是线性的. 为了记号简便，我们将假定在（1）中 y 方程不出现. 一般情形沿着同样的线索推导，对于任意 $P\in S^k,Q\in S^n$，我们首先考虑"非齐次线性"系统

$$\begin{aligned}&(a)\quad \dot{\theta}=P(t,\theta),\\&(b)\quad \dot{x}=A(\theta)x+Q(t,\theta).\end{aligned}\tag{3.1}$$

对于任意$(\tau,\zeta)\in R\times R^k$，令 $\theta^*(t)=\theta^*(t,\tau,\ \zeta,\rho)$为(3.1)的满足 $\theta^*(\tau)=\zeta$ 的解. 由于 $P(t,\theta)$有界，这个解总在$(-\infty,\infty)$上存在. 我们希望在 S^n 内找一个函数 $X(\cdot,\cdot,P,Q)$，使得

$$(\theta^*(t),X(t,\theta^*(t),P,Q)),\quad t\in(-\infty,\infty)$$

对于 $t\in(-\infty,\ \infty)$与所有$(\tau,\ \zeta)\in R\times R^k$ 是(3.1)的解. 如果我们能够达到这一点，则集合

$$\mathscr{S}=\{(t,\theta,x):x=X(t,\theta,P,Q),\ (t,\theta)\in R\times R^k\}$$

是(3.1)的一个积分流形. 为了推导出这样的函数X的方程，设 $\Phi(t,\tau,\zeta,P)$是线性系统

$$\dot{x}=A(\theta^*(t,\tau,\zeta,P))x\tag{3.2}$$

的主矩阵解. 对(3.1b)用常数变易公式，产生

$$X(t,\theta^*(t,\tau,\xi,P),P,Q)=\Phi(t,\tau,\zeta,P)X(\tau,\zeta,P,Q)$$
$$+\int_\tau^t\Phi(t,s,\zeta,P)Q(s,\theta^*(s,\tau,\zeta,P))ds,$$
$$t\in(-\infty,\infty).$$

如果 A 不依赖于 θ，则由于 $\Phi(t,\tau,\zeta,P)=\exp[A(t-\tau)]$，这个关系式比较简单，用 $\Phi^{-1}(t,\tau,\zeta,P)$ 乘上面这个关系式，利用主矩阵解的性质，看出常数变易公式可以写成

$$X(\tau,\zeta,P,Q)=\Phi(\tau,t,\zeta,P)X(t,\theta^*(t,\tau,\zeta,P),P,Q)$$
$$-\int_\tau^t \Phi(\tau,s,\zeta,P)Q(s,\theta^*(s,\tau,\zeta,P))ds,$$
$$t\in(-\infty,\infty).$$

由于假定 X 属于 S^n，特别它是有界的，我们可以在这个关系式中令 t 趋于 $-\infty$，又利用假设 (H_5)，得到

$$X(t,\theta,P,Q)=\int_{-\infty}^0 \Phi(t,u+t,Q,P)$$
$$\times Q(u+t,\theta^*(u+t,t,\theta,P))du, \qquad (3.3)$$

这里已经用 (t,θ) 来代替了 τ,ζ.

由得到关系式(3.3)的过程，推知(3.3)定义了(3.1)的一个积分流形，并且它还是留在 x 坐标有界的区域内的仅有的积分流形。这些事实综合为

引理 3.1. 如果满足 (H_5)，则对于任意 $P\in S^k$，$Q\in S^n$，方程(3.1)有一个用(3.3)的 $X(t,\theta,P,Q)$ 参数地定义的积分流形，而且它是(3.1)仅有的 x 坐标有界的积分流形.

我们的起始目的是推导由(3.3)定义的函数 $X(t,\theta,P,Q)$ 的若干性质. 特别地，我们希望讨论作为 P,Q 的界与光滑性质的函数而言的 X 的界与光滑性质. 对于"非齐次线性"系统(3.1)的基本结果是下述

引理 3.2. 假设 $A(\theta)$, $P(t,\theta)$, $Q(t,\theta)$ 对 θ 满足 Lipschitz 条件，Lipschitz 常数分别是 r, $L(P)$, $M(Q)$，又假设 (H_5) 被满足，其中 $\alpha>L(P)$. 如果 $X(\cdot,\cdot,P,Q)$ 由(3.3)定义，则 $X(\cdot,\cdot,P,Q)$ 属于 S^n，定义了(3.1)的一个积分流形，又对于所有 $t\in R$, $\theta,\bar{\theta}\in R^k$, $P,\bar{P}\in S^k$, $Q,\bar{Q}\in S^n$ 满足

(a) $|X(t,\theta,P,Q)-X(t,\bar{\theta},P,Q)|\leqslant\frac{K}{\alpha-L(P)}\Big[M(Q)$

$+\frac{Kr}{\alpha}\|Q\|\Big]|\theta-\bar{\theta}|$,

(b) $\|X(\cdot,\cdot,P,Q)-X(\cdot,\cdot,P,\bar{Q})\|\leqslant\frac{K}{2}\|Q-\bar{Q}\|$,

$$X(\cdot,\cdot,P,0)=0, \tag{3.4}$$

(c) $\|X(\cdot,\cdot,P,Q)-X(\cdot,\cdot,\bar{P},Q)\|\leqslant\frac{K}{\alpha(\alpha-L(P))}$

$\times\Big[M(Q)+\frac{Kr}{\alpha}\|Q\|\Big]\|P-\bar{P}\|$.

如果 $P(t,\theta)$, $Q(t,\theta)$ 是 θ 的有向量周期 ω 的周期函数，则 $X(t,\theta,P,Q)$ 是 θ 的有向量周期 ω 的周期函数. 如果 $P(t,\theta)$, $Q(t,\theta)$ 是 t 的周期为 T (或殆周期)的函数，则 $X(t,\theta,P,Q)$ 是 t 的周期为 T (或殆周期) 的函数. 如果 $P(t,\theta)$, $Q(t,\theta)$ 不依赖于 t, 则 $X(t,\theta,P,Q)$ 不依赖于 t.

证明 由于 $X(\cdot,\cdot,\cdot,Q)$ 对 Q 是线性的，又假设 (H_5) 意味着

$$\|X(\cdot,\cdot,\cdot,Q)\|\leqslant\frac{K\|Q\|}{\alpha},$$

差不多直接得到关系式 (3.4b). 由于 $\theta^*(\cdot,\cdot,\theta,P)$ 非线性地依赖于 θ 与 P, 关系式(3.4a), (3.4c)较难得到. 如果 A 依赖于 θ, 这种非线性依赖性也反映到函数 $\Phi(\cdot,\cdot,\theta,P)$. 我们的第一个目标是求关于 θ,P 的这个依赖性的估计式.

由于 $P(t,\theta)$ 对 θ 满足 Lipschitz 条件, Lipschitz 常数是 $L(P)$, 对(3.1a)简单地应用微分不等式，得到对于所有 t, $\tau\in R$ 与 $P,\bar{P}\in S^t$ 的估计式

(a) $|\theta^*(t,\tau,\zeta,P)-\theta^*(t,\tau,\bar{\zeta},P)|\leqslant e^{L(P)|t-\tau|}|\zeta-\bar{\zeta}|$,

$$\tag{3.5}$$

(b) $|\theta^*(t,\tau,\zeta,P)-\theta^*(t,\tau,\zeta,\bar{P})|\leqslant\frac{e^{L(P)|t-\tau|}-1}{L(P)}\|P-\bar{P}\|$.

事实上，这两个关系都容易从关系式

$$D^+\gamma(u)\leqslant L(P)\gamma(u)+\|P-\bar{P}\|$$

得到，这里 D^+ 是右导数. 令 $\gamma(u)=|\theta^*(u,\tau,\zeta,P)-\theta^*(u,\tau,\zeta,\bar{P})|$，得到(3.5b). 又令 $\gamma(u)=|\theta^*(u,\tau,\zeta,P)-\theta^*(u,\tau,\bar{\zeta},P)|$，$P=\bar{P}$，便得到(3.5a).

现在我们求 $\Phi(t,\tau,\theta,P)$ 对于 θ,P 的依赖性的估计式. 如果我们利用 $\Phi(t,\tau,\theta,P)$ 是(3.2)的主矩阵解以及差 $\Phi(u,\tau,\theta,P)-\Phi(u,\tau,\bar{\theta},\bar{P})$ 是矩阵方程

$$\frac{dx}{du}=A(\theta^*(u,\tau,\theta,P))x+[A(\theta^*(u,\tau,\theta,P))-A(\theta^*(u,\tau,\bar{\theta},\bar{P}))]\Phi(u,\tau,\bar{\theta},\bar{P})$$

的解这一事实，则由常数变易公式得知对于所有 $u\in R$

$$\Phi(t,u+t,\theta,P)-\Phi(t,u+t,\bar{\theta},\bar{P})=\int_u^0\Phi(t,v+t,\theta,P)\times[A(\theta^*(v+t,u+t,\theta,P))-A(\theta^*(v+t,u+t,\bar{\theta},\bar{P}))]\times\Phi(v+t,u+t,\bar{\theta},\bar{P})dv.$$

因此，从(H_5)与关于 A 满足 Lipschitz 条件的假定，得到 $u\leqslant 0$ 时

$$|\Phi(t,u+t,\theta,P)-\Phi(t,u+t,\bar{\theta},\bar{P})|$$

$$\leqslant K^2re^{\alpha u}\int_u^0|\theta^*(v+t,u+t,\theta,P)-\theta^*(v+t,u+t,\bar{\theta},\bar{P})|du. \tag{3.6}$$

如果我们设 $P=\bar{P}$，又利用(3.5a)与(3.6)，则对所有 $u\leqslant 0$

$$|\Phi(t,u+t,\theta,P)-\Phi(t,u+t,\bar{\theta},P)|$$

$$\leqslant\frac{K^2r}{L(P)}e^{\alpha u}\ [e^{-L(P)u}-1]|\theta-\bar{\theta}|. \tag{3.7}$$

如果我们设 $\theta=\bar{\theta}$，又利用(3.5b)与(3.6)，则对所有 $u\leqslant 0$

$$|\Phi(t,u+t,\theta,P)-\Phi(t,u+t,\theta,\bar{P})|$$

$$\leqslant\frac{K^2r}{L^2(P)}e^{\alpha u}[e^{-L(P)u}-1+L(P)u]\|P-\bar{P}\|. \tag{3.8}$$

从(3.3)与(H_5)，我们有

$$|X(t,\theta,P,Q)-X(t,\bar{\theta},P,Q)|$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{0}Ke^{\alpha u}M(Q)|\theta^*(u+t,t,\theta,P)-\theta^*(u+t,t,\bar{\theta},P)|du$$

$$+\int_{-\infty}^{0}|\Phi(t,u+t,\theta,P)-\Phi(t,u+t,\bar{\theta},P)|\|Q\|du.$$

利用(3.5a)与(3.7)，我们得到关系(3.4a)。利用(3.5b)与(3.8)作相似的估计给出(3.4c)。这就完成了引理第一部分的证明。

现在我们假设(3.1)中的 P, Q 对 θ 有向量周期 ω。唯一性定理意味着 $\theta^*(t,\tau,\zeta+\omega,P)=\theta^*(t,\tau,\zeta,P)+\omega$，于是 $\Phi(t,\tau,\theta+\omega,P)=\Phi(t,\tau,\theta,P)$。从公式(3.3)，可得 $X(t,\theta+\omega,P,Q)=X(t,\theta,P,Q)$。如果(3.1)中的$P,Q$ 对 t 的周期为 T，则解的唯一性产生 $\theta^*(t+\tau+T,\tau+T,\zeta,P)=\theta^*(t+\tau,\tau,\zeta,P)$。这个事实又意味着 $\Phi(t+\tau,\tau,\theta,P)$对 τ 的周期为 T。由于 $\Phi(\tau,t+\tau,\theta,P)\times\Phi(t+\tau,\tau,\theta,P)=I$，函数$\Phi(\tau,t+\tau,\theta,P)$对 τ 的周期是 T。利用(1.3)，得知 $X(t,\theta,P,Q)$对 t 有周期为 T。如果 $P(t,\theta),Q(t,\theta)$ 不依赖于 t，则由同样的论证得知 $X(t,\theta,P,Q)$对 t 是有任意周期的周期函数，因此必定不依赖于 t。

P, Q 是 t 的殆周期函数的情形讨论如下。如果 δ 是任意实数，我们在 S^k, S^n 内分别用

$$P_\delta(t,\theta)=P(t+\delta,\theta),$$

$$Q_\delta(t,\theta)=Q(t+\delta,\theta)$$

定义 P_δ, Q_δ。利用与估计 $\theta^*(t,\tau,\zeta,P)$对P 的 Lipschitz 函数相同的过程，容易得到对于所有 u,t,θ 成立的

$$|\theta^*(u+t+\delta,t+\delta,\theta,P)-\theta^*(u+t,t,\theta,P)|$$

$$\leqslant\frac{e^{L(P)|u|}-1}{L(P)}\|P_\delta-P\|.$$

现在利用与求得(3.8)同一类型的议论，可得对所有 $u\leqslant0$

$$|\Phi(t+\delta, u+t+\delta, \theta, P)-\Phi(t, u+t, \theta, P)|$$
$$\leqslant \frac{K^2 r}{L^2(P)} e^{\alpha u}\left[e^{-L(P)u}-1+L(P)u\right]\|P_\delta-P\|.$$

在(3.3)中利用这两个关系，我们得到对所有 t, δ, θ 成立的不等式

$$|X(t+\delta, \theta, P, Q)-X(t, \theta, P, Q)|$$
$$\leqslant \frac{K}{\alpha}\|Q_\delta-Q\|+\frac{K}{\alpha(\alpha-L(P))}\left[M(Q)+\frac{Kr}{\alpha}\|Q\|\right]\|P_\delta-P\|.$$

利用这个不等式与我们关于殆周期函数的基本结果（附录的定理8），便可完成引理 3.2 的证明.

在引理 3.2 中叙述到的常数 α 是(3.1) 的解趋向于积分流形的速率的一个量度，而常数 $L(P)$ 在某种意义下则是流形上的解可能相互靠拢或离开的最大速率的一个量度. 自然要问，为了得到流形参数表示式的 Lipschitz 光滑性，是否必需 $\alpha-L(P)>0$？

为了了解当 $\alpha-L(P)<0$ 时可能遇到的某些困难，让我们讨论下述二维(u, v)空间的例子. 如果 $u=r\cos\theta$, $v=r\sin\theta$, 系统为

$$\dot{\theta}=k\sin\theta-\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}(r-1)^2,$$
$$\dot{r}=r(1-r).$$

圆 $r=1$ 是这个系统的一个积分流形. 如果 $r=1+\rho$, 则流形 $r=1$ 的线性变分方程是$\dot{\rho}=-\rho$, 而假设(H_5) 中的常数 α 是$+1$. 另一方面,在流形$r=1$上, Lipschitz 常数$L(P)$可以取为k.此外,在$r=1$上有稳定结点$(-1, 0)$与鞍点$(1, 0)$. 在图 3.1 中画出了 $k<1$ 与 >1 时这个系统在 $r=1$ 附近的

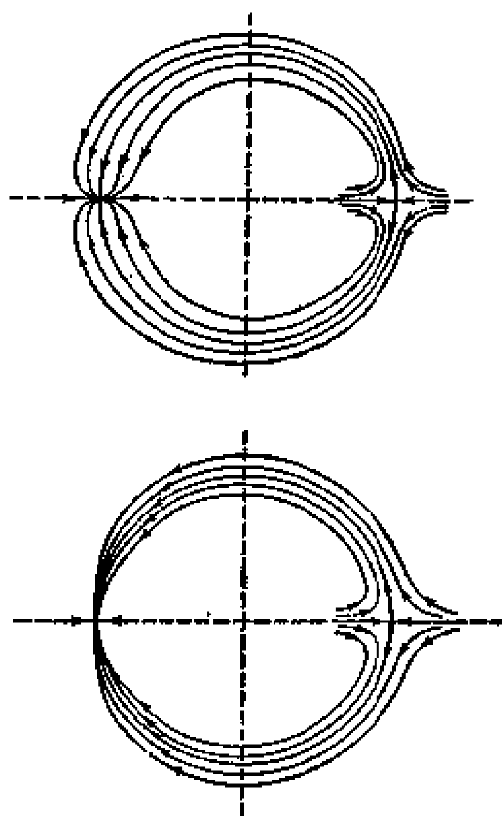


图 VI.3.1

轨道．当$k<1$时，所有轨道与圆$r=1$相切地进入结点$(-1,0)$，当$k>1$时，所有轨道与圆$r=1$相垂直地进入结点$(-1,0)$．当$k>1$时，方程的小扰动可能引出一条有尖点$(-1,0)$的不变曲线．

下面这个例子说明尖点可能出现．考虑系统

$$\dot{\theta}=k\sin\theta,$$

$$\dot{x}=-x+f(\theta),$$

这里f的一阶导数连续，又$f(\theta+2\pi)=f(\theta)$．第一个方程有解

$$\theta^*(t,\tau,\zeta)=2\operatorname{arc\,tg}\left(e^{k(t-\tau)}\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}\right),$$

因此由(3.3)得到积分流形

$$X(t,\theta,k)\equiv X(\theta,k)=\int_{-\infty}^{0}e^{u}f\left[2\operatorname{arc\,tg}\left(e^{ku}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right]du.$$

对于$(-\pi,\pi)$内部的任意闭区间，

$$\frac{\partial X(\theta,k)}{\partial\theta}=\int_{-\infty}^{0}e^{(1-k)u}\frac{df}{d\theta}\left[\sin^2\frac{\theta}{2}+e^{-2ku}\cos^2\frac{\theta}{2}\right]^{-1}du$$

存在，并且对任意k是连续的．如果$k>1$，又$df/d\theta$在$\theta=\pi$与$-\pi$的邻域内不是零，$X(\theta,k)$不满足Lipschitz条件，则上面这个积分当$\theta\to\pi$或$-\pi$时成为无界的．

Ⅶ.4. 映射原理

为了用引理3.2证明定理2.1，我们定义一个不动点重合于(1)的积分流形的映射，并且证明它是一个压缩．为了方便，先比较一般地叙述这个映射，随后特殊化到系统(1)．对于给定的常数Δ, D，设

$$S^n(\Delta,D)=\{f\in S^n:\|f\|\leqslant D,\text{对于所有}(t,\theta,\bar{\theta})\in R\times R^k\times R^k,|f(t,\theta)-f(t,\bar{\theta})|\leqslant\Delta|\theta-\bar{\theta}|\}.\tag{4.1}$$

设$P:R\times R^k\times S^n(\Delta,D)\to R^k$，$Q:R\times R^k\times S^n(\Delta,D)\to R^n$，又对于任意$f\in S^n(\Delta,D)$，假设$P(\cdot,\cdot,f)$在$S^k$内，$Q(\cdot,\cdot,f)$在$S^n$内．我

们从系统(3.1)的讨论得知,对于任意 $f\in S^{n}(\Delta,D)$,系统

$$\begin{aligned}&\dot{\theta}=P((t,\theta,f),\\&\dot{x}=A(\theta)x+Q(t,\theta,f)\end{aligned}\tag{4.2}$$

有一个由参数式 (3.3) 定义的积分流形. 为了强调对于 f 的依赖性,我们再把(3.3)改写成

$$X^{*}(t,\theta,f)=\int_{-\infty}^{0}\Phi_{1}(t,u+t,\theta,f)\times Q(u+t,\theta_{1}(u+t,t,\theta,f))du,\tag{4.3}$$

这里我们用了简化了的但是可望不引起混淆的记号

$$\begin{aligned}&\theta_{1}(t,\tau,\zeta,f)=\theta^{*}(t,\tau,\zeta,P(\cdot,\cdot,f)),\\&\Phi_{1}(t,\tau,\zeta,f)=\Phi(t,\tau,\zeta,P(\cdot,\cdot,f)),\\&X^{*}(t,\theta,f)=X(t,\theta,P(\cdot,\cdot,f),Q(\cdot,\cdot,f)).\end{aligned}$$

如果在 $S^{n}(\Delta,D)$内有一个 f, 使得 $f(t,\theta)=X^{*}(t,\theta,f)$,则 f 定义(4.2)的一个积分流形. 显然,在定义

$$\begin{aligned}&P(t,\theta,f)=w(t,\theta,e)+\Theta(t,\theta,f(t,\theta),e),\\&Q(t,\theta,f)=F(t,\theta,f(t,\theta),e)\end{aligned}\tag{4.4}$$

后,上面这个手续可以简便地用到没有 y 的方程的系统(1).

现在我们推导关于P,Q的某些条件,以保证对于 $f\in S^{n}(\Delta,D)$, $X^{*}(\cdot,\cdot,f)$是一个压缩。

作下述假定: 存在常数 $\beta(D)$, $M(\Delta,D)$, $L(\Delta,D)$ 与 $a(D)$, $b(D)$,使得对于所有$(t,\theta,\bar{\theta})\in R\times R^{k}\times R^{k}$ 与 $f,\bar{f}\in S^{n}(\Delta,D)$,

$$\begin{aligned}&\|Q(\cdot,\cdot,f)\|\leqslant\beta(D),\\&\|Q(\cdot,\cdot,f)-Q(\cdot,\cdot,\bar{f})\|\leqslant a(D)\|f-\bar{f}\|,\\&\|P(\cdot,\cdot,f)-P(\cdot,\cdot,\bar{f})\|\leqslant b(D)\|f-\bar{f}\|,\\&|Q(t,\theta,f)-Q(t,\bar{\theta},f)|\leqslant M(\Delta,D)|\theta-\bar{\theta}|,\\&|P(t,\theta,f)-P(t,\bar{\theta},f)|\leqslant L(\Delta,D)|\theta-\bar{\theta}|.\end{aligned}\tag{4.5}$$

现在,如果我们以 $M(\Delta,D)$, $L(\Delta,D)$分别代替 $M(Q)$, $L(P)$,

则用(3.4)得知，只要$\alpha-L(\Delta,D)>0$，对于所有$(t,\theta,\bar{\theta})\in R\times R^k\times R^k$与$f,\bar{f}\in S^n(\Delta,D)$，有

$$\|X^*(\cdot,\cdot,f)\|\leqslant\frac{K}{\alpha}\beta(D),$$

$$|X^*(t,\theta,f)-X^*(t,\bar{\theta},f)|\leqslant\frac{KM_1(\Delta,D)}{\alpha-L(\Delta,D)}|\theta-\bar{\theta}|,$$

$$\|X^*(\cdot,\cdot,f)-X^*(\cdot,\cdot,\bar{f})\|\leqslant\frac{K}{\alpha}\left[\frac{M_1(\Delta,D)b(D)}{\alpha-L(\Delta,D)}+a(D)\right]\|f-\bar{f}\|, \tag{4.6}$$

$$M_1(\Delta,D)=M(\Delta,D)+\frac{Kr}{\alpha}\beta(D)$$

从这些关系式，我们可以陈述下面这个

引理4.1. 假设Q,P满足(4.5)，又对于任意$f\in S^n(\Delta,D)$，(4.2)唯一的积分流形$X^*(\cdot,\cdot,f)$由(4.3)定义．只要Δ，D满足关系式

(a) $\alpha-L(\Delta,D)>0$,

(b) $K\beta(D)<\alpha D$,

(c) $KM_1(\Delta,D)<[\alpha-L(\Delta,D)]\Delta$, (4.7)

(d) $\frac{K}{\alpha}\left[\frac{M_1(\Delta,D)b(D)}{\alpha-L(\Delta,D)}+a(D)\right]<\frac{1}{2}$,

由$Tf=X^*(\cdot,\cdot,f)$定义的映射$T:S^n(\Delta,D)\to S^n(\Delta,D)$便是一个压缩．

如果满足条件(4.7)，则$X^*(\cdot,\cdot,f)$在$S^n(\Delta,D)$内有唯一的不动点．

Ⅶ.5. 定理2.1的证明

现在我们可以对没有y的情形证明定理2.1．要作的仅有的一件事是对于由(4.4)定义的P，Q，找到(4.5)中的常数，再把它

们代入(4.7). 根据假设(H_2)—(H_4), 对于$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, 得到

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad \beta(D)=\delta(D,\varepsilon)D+N(\varepsilon),\\
&(b)\quad a(D)=\delta(D,\varepsilon),\\
&(c)\quad b(D)=\mu(D,\varepsilon),\\
&(d)\quad M(\Delta,D)=\gamma(D,\varepsilon)+\delta(D,\varepsilon)\Delta,\\
&(e)\quad L(\Delta,D)=L(\varepsilon)+\eta(D,\varepsilon)+\mu(D,\varepsilon)\Delta.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

如果把(5.1)用到(4.7), 便得到假设(H_6)中的关系(2.3).

这就在不出现向量y的情况下证明了定理2.1. 出现y的情况沿着同样的线索进行, 只是要用到这样一个事实: 方程

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}&=P(t,\theta),\\
\dot{x}&=A(\theta)x+Q(t,\theta),\\
\dot{y}&=B(\theta)y+R(t,\theta)
\end{aligned}
$$

有唯一的由$X(t,\theta,P,Q)$, $Y(t,\theta,P,R)$表出的积分流形, 这里X由(3.3)给出, 而

$$
Y(t,\theta,P,R)=\int_0^{\infty}\Psi(t,u+t,\theta,P)R(u+t,\theta^*(u+t,t,\theta,P))du,
$$

其中$\Psi(t,\tau,\zeta,P)$是线性系统

$$
\dot{y}=B(\theta^*(t,\tau,\zeta,P))y
$$

的主矩阵解.

Ⅶ.6. 被扰动流形的稳定性

对于系统(1)的未被扰动的部分, 即

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}&=w(t,\theta,\varepsilon),\\
\dot{x}&=A(\theta,\varepsilon)x,\\
\dot{y}&=B(\theta,\varepsilon)y,
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

它有唯一的x与y坐标有界的积分流形, 即为$x=0$, $y=0$. 这个流形有下述意义的鞍点结构: (6.1)的任意一个解, 当$t\to\infty$时x

指数地趋于零，当 $t\to-\infty$ 时 y 指数地趋于零．可以证明，对于被扰动的流形（其存在性由定理 2.1 保证）鞍点结构也被保存了．

由于这个事实的证明极长，又不包含实质上是新的想法，我们就不进行了．它的想法是首先对于(1)的所有 $t\geqslant0$ 时 x 与 y 坐标有界的解确定它们的积分方程．这些解的集合中将有位在被扰动流形上的那些解．对于这些积分方程的每个解，我们可以伴随以积分流形上的一个解，使得 $t\to\infty$ 时它们之差指数地趋于零．由所有这样的解组成的集合叫做被扰动积分流形的稳定流形，可以证明它同胚于 $R^k\times\{(x,y),\ |x|<1,\ |y|<1\}$．对区间 $t\leqslant0$ 作相同类型的议论，得到不稳定流形。

这个分析的一个重要结论是，如果在(1)中 y 坐标不出现，则被扰动积分流形是稳定的，如果 y 坐标出现，则流形不稳定．

VII.7. 应用

在这节里，我们列举本章理论的某些应用．应用的种类有这么多，以致不写专题论文就不可能作到公平合理．然而，希望下面提出的少数应用连同分派到第 8 节的习题能够指出理论的可能范围，并且鼓励读者阅读进一步的文献．

假设方程

$$\dot{x}=f(x),\tag{7.1}$$

这里 f 在 R^n 内有连续的一阶导数，有一个非常数的以 ω 为周期的解 u，这个解的线性变分方程

$$\dot{y}=\frac{\partial f(u(t))}{\partial x}y\tag{7.2}$$

有 $n-1$ 个特征乘数不在单位圆周上．又假设对于 $(t,x)\in R\times R^n$，$g(t,x)$ 连续，对 x 有连续的一阶导数，又对于 R 内的 τ 与任何紧集内的 x，$g(t,x)$ 有界。

定理 7.1. 在上面的假设之下，存在周期轨道 $\mathscr{C}=\{x:x=u(\theta),0\leqslant\theta\leqslant\omega\}$ 的一个邻域 U 与 $e_1>0$，使得系统

$$\dot{x}=f(x)+eg(t,x) \tag{7.3}$$

当 $0\leqslant|e|\leqslant e_1$ 时在 $R\times U$ 内有一个积分流形 S_e，$S_0=R\times\mathscr{C}$ 是柱面. 如果(7.2)有 $n-1$ 个乘数在单位圆内部，则 S_e 渐近稳定，如果有一个乘数在单位圆外，S_e 不稳定. 集合 S_e 有参数表达式

$$S_e=\{(t,x):x=u(\theta)+v(t,\theta,e),(t,\theta)\in R\times R\}.$$

这里 $v(t,\theta,0)=0$，$v(t,\theta,e)=v(t,\theta+\omega,e)$，而如果 $g(t,\theta)$ 对 t 是殆周期（周期为 T）的，则 $v(t,\theta,e)$ 对 t 是殆周期（周期为 T）的.

证明 这是前面各个结果的一个简单结论. 事实上，利用第 VI 章的坐标变换，便得到系统(1)的一个特殊情形. 上面的假设容许我们直接应用定理 2.2 以得到对于区间 $0<e\leqslant e_1$ 而言流形的存在性. 用 $-e$ 代替 e，便到得关于 $-e_1\leqslant-e<0$ 的结果. 在 $e=0$，定义(1)的流形为零，于是证明了存在性. 稳定性乃是第 6 节内说明的推论.

在(7.3)中 g 对 t 的周期为 T 的情形，定理 7.1 给出的积分流形有一个对 t 的周期是 T 的参数表达式. S_e 在 $t=0$ 与 $t=T$ 的截痕因之相同，而由它是积分流形这一事实，推知截痕通过微分方程的解映入自己. 由于微分方程以 T 为周期，跟随 $x(0,x_0)=x_0$ 的解 $x(t,x_0)$ 由 $t=0$ 到 $t=2T$，与跟随此解由 $t=0$ 到 $t=T$ 再跟随解 $x(t,x(T,x_0))$ 由 $t=0$ 到 $t=T$ 结果相同. 因此在这种情况下，(7.3)在 S_e 上的解可当作是一个在环面上没有临界点的微分方程的解，这个环面由取曲面 S_e 从 $t=0$ 到 $t=T$ 的截段并把截段的两端重合起来而得到. 于是第 II 章的理论给出在 S_e 上解的可能性态.

定理 7.2. 假设 $f(x)$ 满足定理 7.1 的条件，在 $\mathscr{C}$ 的一个邻

域内，$g(t, x)$连续，并与它对 x 的一阶偏导数都一致有界．如果 $g(t,x)$是相对于 x 一致的 t 的殆周期函数，又

$$M[g(\cdot,x)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g(t,x)dt=0,$$

则存在$\mathscr{C}$的一个邻域U与 $\omega_0>0$，使得系统

$$\dot{x}=f(x)+g(\omega t,x) \tag{7.4}$$

当 $\omega\geqslant\omega_0$时在 $R\times U$ 内有一个积分流形 S_ω，当 $\omega\to\infty$ 时 $S_\omega\to R\times\mathscr{C}$，如果(7.2)的 $n-1$ 个乘数在单位圆内部，则 S_ω 渐近稳定，如果有一个乘数在单位圆外部，S_ω 不稳定．集合 S_ω 有参数表达式为

$$S_\omega=\{(t,x):x=u(\theta)+v(\omega t,\theta,\omega^{-1}),(t,\theta)\in R\times R\},$$

这里 $v(t,\theta,0)=0, v(t,\theta,\alpha)=v(t,\theta+\omega,\alpha), v(t,\theta,\alpha)$ 对 t 是殆周期的．

证明 从附录的引理 5，对于任意 $\eta>0$，存在一个对于 x 有需要的那么多阶导数的函数 $w(t,x,\eta)$ 和一个当 $\eta\to0$ 时趋于零的函数 $\sigma(\eta)$，使得对于所有 $t\in R$ 与Γ的一个邻域内的 x，

$$|\partial w(t,x,\eta)/\partial t-g(t,x)|<\sigma(\eta).$$

此外，$\eta\to0$ 时 $\eta w, \eta\partial w/\partial x\to0$．因此如同在引理 V.3.2 中一样，有一个 $\omega_0>0$ 使得变换

$$x=y+\frac{1}{\omega}w\left(\omega t,y,\frac{1}{\omega}\right)$$

是在Γ的邻域内的同胚．如果把这个变换应用到(7.4)，得到系统

$$\dot{y}=f(y)+G(\omega t,y,\omega^{-1}).$$

这里 $G(\tau,y,\omega^{-1})$对 τ,y,ω 连续，对于R中的 τ，在 $\mathscr{C}$ 的一个邻域内的 y 以及$\omega\geqslant\omega_0$，G 与它对 y 的一阶导数一致有界，又$G(\tau,y,0)=0$．如果利用在第 VI 章中的坐标变换，又令 $\omega t=\tau$，$\omega^{-1}=\varepsilon$，则新系统是可以直接应用定理 2.3 的系统(1)的一个特殊情形．这

就将完成积分流形的存在性的证明．稳定性从第 6 节推出．

前面的结果的另一个应用涉及平均法的一个推广．考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{\psi}&=e+\varepsilon\Psi(\psi,\rho),\\ \dot{\rho}&=\varepsilon R(\psi,\rho).\end{aligned}\tag{7.5}$$

这里 ψ 在 R^k 内，ρ 在 R^p 内，$e=(1,\cdots,1)$，而 $\Psi(\psi,\rho)$，$R(\psi,\rho)$ 对 ψ 是周期为 ω 的多重周期函数，对于 ρ 有连续的一阶导数．设

$$\begin{aligned}\Psi_0(\psi,\rho)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\Psi(\psi+et,\rho)dt,\\ R_0(\psi,\rho)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T R(\psi+et,\rho)dt.\end{aligned}\tag{7.6}$$

从附录知，对于任意 $\eta>0$，存在对 ψ，ρ 有所需那么多阶导数的函数 $u(\psi,\rho,\eta)$，$v(\psi,\rho,\eta)$ 以及 $\eta\to0$ 时趋于零的函数 $\sigma(\eta)$，使得

$$\left|\frac{\partial u}{\partial\psi}e-\Psi(\psi,\rho)+\Psi_0(\psi,\rho)\right|<\sigma(\eta),$$

$$\left|\frac{\partial v}{\partial\psi}e-R(\psi,\rho)+R_0(\psi,\rho)\right|<\sigma(\eta),$$

又对于 R^k 内的 ψ 与有界集内的 ρ，当 $\eta\to0$ 时，函数 ηu，ηv，$\eta\partial u/\partial\psi$，$\eta\partial v/\partial\psi$，$\eta\partial u/\partial\rho$，$\eta\partial v/\partial\rho$ 都一致地趋于零．因此，同在定理V.3.2的证明中一样，存在 $\varepsilon_0>0$，使得对于 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$，$R^k$ 内的 ψ，ϕ 与有界集内的 ρ，r，变换

$$\begin{aligned}\psi&=\phi+\varepsilon u(\phi,r,\varepsilon),\\ \rho&=\phi+\varepsilon v(\phi,r,\varepsilon)\end{aligned}\tag{7.7}$$

是一个同胚．

如果把变换(7.7)应用到(7.5)，则经过少许简单的计算产生

$$\begin{aligned}\dot{\phi}&=e+\varepsilon\Psi_0(\phi,r)+\varepsilon\Psi_1(\phi,r,\varepsilon),\\ \dot{r}&=\varepsilon R_0(\phi,r)+\varepsilon R_1(\phi,r,\varepsilon),\end{aligned}\tag{7.8}$$

这里 Ψ_1，R_1 有与 Ψ，R 相同的光滑性质，但是现在满足 $\Psi_1(\phi,r,0)$

$=0$, $R_1(\phi, r, 0)=0$. 用另外的话来说，利用一个在 $\varepsilon=0$ 附近实际上是恒等变换的变换(7.7)，系统(7.5)被变换为一个方程，它是平均方程

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \varepsilon+\varepsilon \Psi_0(\theta, \rho), \\ \dot{\rho} &= \varepsilon R_0(\theta, \rho) \end{aligned} \tag{7.9}$$

的高阶扰动方程.

现在，可以通过断言平均方程有某些性质来陈述关于积分流形存在性的结果. 例如，假定有 ρ_0 使得 $R_0(\theta, \rho_0)=0$，并且

$$\begin{aligned} &R_0(\theta, \rho_0+z)=C(\theta)z+H(\theta, z), \\ &C(\theta)=\begin{bmatrix} A(\theta) & 0 \\ 0 & B(\theta) \end{bmatrix}, \\ &H(\theta, z)=\begin{bmatrix} F(\theta, z) \\ G(\theta, z) \end{bmatrix}, \\ &z=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \\ &\Psi_0(\theta, \rho_0+z)=\Theta(\theta, z), \end{aligned} \tag{7.10}$$

这里所有的矩阵是这样分块的，以致任何矩阵演算将是相容的. 作为定理 2.3 与变换后方程(7.8)的形式的一个直接推论，可以陈述

定理 7.3 假设(7.10)中的 A, B 满足第 1 节的假设(H_5)，其中 $\alpha=\varepsilon\alpha_1$, $\alpha_1>0$ 为一个常数. 如果 $\Theta(\theta, 0)$ 的Lipschitz 常数L满足 $\alpha_1-L>0$，则存在 $\varepsilon_1>0$ 以及在 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ 时连续的函数 $D(\varepsilon)$, $\Delta(\varepsilon)$，它们当 $\varepsilon\to 0$ 时趋于零，还存在 R^p 内的函数 $f(\psi, \varepsilon)$，它在 $R^k\times[0, \varepsilon_1]$内连续，

$$|f(\psi, \varepsilon)-\rho_0|<D(\varepsilon),$$
$$|f(\psi, \varepsilon)-f(\bar{\psi}, \varepsilon)|<\Delta(\varepsilon)|\psi-\bar{\psi}|,$$

使得 $f(\psi, \varepsilon)$是具有向量周期 ω 的 ψ 的多重周期函数，而且集合

$$S_\varepsilon=\{(\psi, \rho): \rho=\rho_0+f(\psi, \varepsilon), \psi\in R^k\}$$

是(7.3)的一个积分流形. 如果 z 的 y 分量在(7.10)中出现，则此流形不稳定，而如果它不出现，则流形稳定.

(7.3)的一个在应用中有用的简单推论是

推论 7.1. 假设平均方程(7.9)不依赖于 ψ; 即平均方程是

$$\begin{aligned}\dot{\theta}&=e+\varepsilon\Psi_0(\rho),\\ \dot{\rho}&=\varepsilon R_0(\rho).\end{aligned}\tag{7.11}$$

又假设有 ρ_0 使得 $R_0(\rho_0)=0$，而矩阵 $C=\partial R_0(\rho_0)/\partial\rho$ 的特征值实部都不是零. 则定理 7.3 的结论依旧正确，且如果 C 的所有特征值实部是负的，则流形稳定，如果有一个特征值实部是正的，流形就不稳定.

VII.8. 习题

下面列出的一些习题，有的比较难，有的若加以完全的讨论，便能引出振动理论中有意义的新结果.

习题 8.1. 利用 VI.3 节的知识说明 van der Pol 方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=-x_1+k(1-x_1^2)x_2,\quad k>0\end{aligned}\tag{8.1}$$

满足定理 7.1 中加在 (7.1) 上的假设条件. 利用定理 7.1 与 7.2 讨论系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=-x_1+k(1-x_1^2)x_2+\varepsilon\sin\omega t,\end{aligned}\tag{8.2}$$

当 ε 小或 ω 大时，积分流形的存在性与稳定性.

利用第 IV 章的理论讨论当 $|\varepsilon|$ 小或 ω 大时，(8.2) 的周期为 $2\pi/\omega$ 的周期解的存在性与稳定性质.

在第 II 章已经指出，除开零解，(8.1)的每个解当 $t\to\infty$ 时趋于周期轨道 $\mathscr{C}$. 你能用前面的讨论方法给出当 $|\varepsilon|$ 小时(8.2)的所有解在 R^2 的某个大区域上的定性性质吗？提示：证明在 R^2 内有

一个开集 U, 使得(8.1)的解曲线的切向量在U的边界点上指向U的内部. 这意味着在 (t,x) 空间内, (8.1)的解的切向量指向"柱面"$R\times\partial U$ 的内部. 因此当$|e|$小或ω大时, 对(8.1)的解也将同样正确. 现在再用对于初始条件的连续性.

习题 8.2. 假设向量系统

$$\dot{x}=f(x),$$
$$\dot{y}=F(y)$$

满足定理 7.1 的条件. 如果在系统

$$\dot{x}=f(x)+eg(t,x,y),$$
$$\dot{y}=F(y)+eG(t,x,y)$$

中 g,G 对于R内的 t 与紧集内的 x, y 有界, 当 e 小时, 它有什么类型的积分流形? 每一个流形的稳定性质是怎样的? 推广这个结果. 提示: 对于每个周期解利用第 VI 章的坐标系统.

习题 8.3. 对于ω大的情形, 讨论系统

$$\dot{x}_1=x_2,$$
$$\dot{x}_2=-x_1+k[1-(x_1+B\sin\omega t)^2]x_2$$

作为B的函数的积分流形的存在性与性质.

习题 8.4. 对于ω大的情形, 讨论系统

$$\dddot{x}+2\ddot{x}+\dot{x}+Kf(x+B\sin\omega t)=0$$

的积分流形的存在性以及对常数K和B的依赖关系, 这里函数$f(x)$非降, 当 $x\to\infty$ 时趋于一个极限. 这个问题是难的, 在这个一般的角度下可能从未解决过. 取特殊函数 f 加以讨论.

习题 8.5. 当 e 小时, 讨论对于不同的 A与ω值, 方程

$$\dot{x}_1=x_2,$$
$$\dot{x}_2=-x_1+e(1-x_1^2)x_2+A\sin\omega t$$

的积分流形的存在性. 设

$$x_1=\rho\sin\theta_1+A(1-\omega^2)^{-1}\sin\omega t,$$

$$x_2=\rho\cos\theta_1+A\omega(1-\omega^2)^{-1}\cos\omega t,$$
$$\theta_2=t.$$

得到 θ_1,θ_2,ρ 的微分方程系统，然后利用推论 7.1. 流形的稳定性质怎么样？当 A,ω 变化时在几何上发生什么现象？

习题 8.6. 当 ε 小时，讨论系统

$$\ddot{x}-\varepsilon(1-x^2-ay^2)\dot{x}+x=0,$$
$$\ddot{y}-\varepsilon(1-y^2-\alpha x^2)\dot{y}+\sigma^2 y=0$$

作为 a,α,σ 函数的积分流形的存在性与稳定性质. 设

$$x=\rho_1\cos\theta_1,$$
$$\dot{x}=-\rho_1\sin\theta_1,$$
$$y=\rho_2\cos\sigma\theta_2,$$
$$\dot{y}=-\sigma\rho_2\sin\sigma\theta_2,$$

得到与系统 (7.8) 形式相同的系统. 现在利用上面描述过的平均法，特别是对于所有满足 $|k|+|l|\leqslant 3$ 的使 $k+l\sigma\neq 0$ 的整数 k 与 l，利用推论 7.1. 周期解是什么？当数 a 与 α 变动时，你能从几何上描述由于周期轨道的稳定性质变化而发生什么现象吗？当对于某些使 $|k|+|l|\leqslant 3$ 的整数 k 与 l 有 $k+l\sigma=0$ 时，发生什么现象？在方程中把 $1-x^2-ay^2$ 改成 $1-x^2-ay^2+bx^2y^2$，讨论作为 a, b,α 的函数发生什么现象？

习题 8.7. 对于方程

$$\ddot{x}-\varepsilon\left(\dot{x}-\frac{\dot{x}^3}{3}\right)+\sigma x+\mu y=0,$$

$$\ddot{y}-\varepsilon\left(\dot{y}-\frac{\dot{y}^3}{3}\right)-\mu x+\nu y=0$$

实行与习题 8.6 中一样的分析，这里参数 σ,μ,ν 取得使 $\varepsilon=0$ 的方程的特征根是单根并且是纯虚数，比方说是 $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$. 在这个假设下，系统可以通过线性变换变成另一个系统，当 $\varepsilon=0$ 时这个

系统是

$$\ddot{u}+\omega_1^2u=0,$$
$$\ddot{v}+\omega_2^2v=0.$$

现在利用与习题 8.6 相同的论证法.

Ⅶ.9. 对进一步学习的说明与建议

关于 Krylov-Bogoliubov 方法的详细参考文献可以在Bogoliubov 与 Mitropolski [1]或 Hale[3]等书中找到. 利用这个方法到积分流形上的原来结果只考虑了未被扰动的流形上的流是平行流的情形;即(1)中 $w(t,\theta,\varepsilon)$ 是常数的情形. 然而,在正文中的证明方法基本上与平行流的原来证明相同,只有技术性细节不同. 这一线索的另外结果由 Diliberto[3]与Kyner[1]得到. Kurzweil [1,2]给出过证明积分流形存在性的另外的方法,并且把问题叙述成在偏微分方程、差分方程与某些泛函微分方程中有应用的格式. 进一步的结果可在 Pliss[1]中寻到.

在系统(1)中, 未假设函数是向量 θ 的周期函数. 把它推广,便导致稳定性理论(Pliss[2], Kelley[1])与分歧理论(Chafee[1], Lykova[1])中的有趣结果.

在证明积分流形诸定理中的基本结果是引理3.2. 它的证明说明, Lipschitz 常数 $L(P)$ 仅用于估计 $\dot{\theta}=P(t,\theta)$ 的解$\theta^*(t,\tau,\theta,P)$ 对 θ 的依赖程度. 有许多不用 P 的 Lipschitz 常数便得到此估计值的方法. 例如,如果 $P(t,\theta)$ 有对 θ 的连续偏导数, 则 $\partial\theta^*(t,\tau,\theta,P)/\partial\theta$ 是方程

$$\dot{\zeta}=\left[\frac{\partial P(t,\theta^*)}{\partial\theta}\right]\zeta$$

的解. 因此, 可以用 $\partial P/\partial\theta$ 的对称部分的固有值来估计 ζ 的增长率. 假设 (H_6) 也可用矩阵 $A(\theta)$, $B(\theta)$ 的对称部分的固有值来验

证. 利用第1节提到的偏微分方程方法, Sacker[1]发现这些概念在讨论方程(1)当其不依赖于t又对θ为周期时的积分流形的存在性与光滑性的时候大有方便之处. Diliberto[3]也用了与正文中相同的概念与方法来求积分流形.

第3节在引理3.2后的第一个例是McCarthy[1]给出的, 第二个例是Kyner[1]给出的. 在关系(5.6)中定义的广义平均(5.6)最早由Diliberto[1]引出. 第8节的一些习题可在Hale[7]中找到.

第 VIII 章　含有小参数的周期系统

在第 IV 章里，我们对于含有小参数的方程，在非临界情形讨论了周期解的存在性；那就是系统

$$\dot{x}=Ax+\varepsilon f(t,x) \tag{1}$$

其中 $f(t+T,x)=f(t,x)$，而且除开 $x=0$，未被扰动的方程

$$\dot{x}=Ax \tag{2}$$

没有解是周期为 T 的．在第 V 章里，平均法被应用到某些系统，它们的未被扰动方程 (2) 有非平凡的以 T 为周期的解．这个方法的基础是作一个变量替换，把系统变为可以被当作平均方程的扰动系统．如果平均方程相对于以 T 为周期的函数类是非临界的，则可以应用第 IV 章的结论．如果平均方程相对于以 T 为周期的函数类是临界的，则可以重复前述过程．除了这是一个非常麻烦的手续以外，还很难把包含在微分方程本身中的定性信息加以平均与反映到迭代格式中去．例如，如果系统(1)有第一积分，这对于各次迭代意味着什么？

对于周期系统，有更有效的方法可用．本章专门介绍确定形如(1)的方程的周期解的一般方法，这里的方程对于以 T 为周期的函数类可能是临界的．这个方法给出 ε 小的时候 (1) 有周期为 T 的解的必要充分条件．这些条件包括一些超越方程（分歧方程或确定方程），它们确定作为(2)的解的以 T 为周期的函数．分歧方程这样来给定，使我们可以定性地讨论它们对于(1)的右边的性质的依赖性．当(1)中的 f 具有某些奇偶性质或系统(1)具有第一积分的时候，这一点就看得很清楚．一般地说，这些系统有周期为 T 的解族．

除开有在上段提到的优点外，这一章的方法可以推广到任何非线性系统．这个题目以及在 Banach 空间对此方法的较一般的阐述，将在下一章论及．

当 $A=0$ 时，基本概念很初等，容易从几何上理解．由于这个理由，在第 1 节详细地论述这种情形．在第 1 节还说明怎样把许多方程的周期解的研究以及线性周期系统的特征指数的确定化到这种简单形式．第 2 节用于讨论一般的系统 (1) 以及具有对称性质或第一积分的系统的结果．在第 3 节里我们利用本章的方法而不是用围绕周期轨道的坐标系统来重新证明第 VI 章的一个结果．

VIII.1．一个特殊的系统

假设 $f:R\times C^n\to C^n$ 是一个连续函数，$\partial f(t,x)/\partial x$ 也连续，$f(t+T,x)=f(t,x)$，ε 是一个参数，考虑系统

$$\dot{x}=\varepsilon f(t,x). \tag{1.1}$$

我们的目的是确定当 ε 小时 (1.1) 是否有任何以 T 为周期的解．当 $\varepsilon=0$，(1.1) 的所有解是以 T 为周期的；即它们都是常数函数．基本问题是：设 (1.1) 有以 T 为周期的解，它对 ε 连续，当 $\varepsilon\to 0$ 时它们趋于退化方程的哪些解？在第 V 章说明了着手解决这个问题的一个方法．Poincaré 提出了另一种方法，假定解以及初始数据有周期性的幂级数展开式．于是初始数据被用来消除很自然地出现在确定解的幂级数系数过程中的长期项．

在这一节里，我们说明解决这个问题的另一个方法，它看起来比 Poincaré 方法具有某些定性的优点．设

$$\mathscr{P}_T=\{g:R\to C^n,\ g\ 连续,\ g(t+T)=g(t)\},$$

$$|g|=\sup_{0\le t\le T}|g(t)|.$$

对于 $\mathscr{P}_T$ 内任意 g，定义 Pg 为它的平均值；即

$$Pg=\frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt, \tag{1.2}$$

显然$\|Pg\|\leqslant\|g\|$. 如果g是周期为T的，则系统

$$\dot{x}=g(t) \tag{1.3}$$

有周期为T的解，当且仅当$Pg=0$. 并且，如果$Pg=0$，设$\mathscr{K}g$是(1.3)的唯一的以T为周期的解，它的平均值等于零；即

$$\mathscr{K}g=(I-P)\int_0^t g(s)ds, \tag{1.4}$$

$$\|\mathscr{K}g\|\leqslant K\|g\|,\quad K=2T.$$

(1.3)的每个解可以写作

$$x=a+\mathscr{K}g,$$

这里a是n维常向量，$a=Px$.

这些简单的说明意味着下述

引理 1.1. 假设P与$\mathscr{K}$如(1.2)，(1.4)所定义. 则

(i) 仅当$Pf(\cdot,x(\cdot))=0$时，$x(t)$是(1)的以T为周期的解；即仅当$f(\cdot,x(\cdot))=(I-P)f(\cdot,x(\cdot))$时$x(t)$是(1)的以$T$为周期的解.

(ii) 系统(1.1)有周期为T的解，当且仅当x满足系统

$$\begin{aligned}&(a)\quad x=a+\varepsilon\mathscr{K}(I-P)f(\cdot,x),\\&(b)\quad \varepsilon Pf(\cdot,x)=0,\end{aligned} \tag{1.5}$$

这里a是由$a=Px$给出的n维常向量.

证明 如果x是(1.1)的周期为T的解，设$g(t)=f(t,x(t))$，就直接推出断言(i). x满足(1.5)这个事实简直是显然的. 如果x是(1.5)的解，则$f(\cdot,x)=(I-P)f(\cdot,x)$，因此$x$是(1.1)的周期为$T$的解. 这就证明了引理.

引理 1.2. 对于任意的$\alpha>0$，有一个$\varepsilon_0>0$，使得对于C^n内任意满足$|a|\leqslant\alpha$的a及$|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$，有唯一函数$x^*=x^*(a,\varepsilon)$满足

(1.5a). 并且 $x^*(a,\varepsilon)$ 对于 a,ε 有连续的一阶导数，$x^*(a,0)=a$. 如果对于 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 有满足 $|a(\varepsilon)|\leqslant\alpha$ 的 $a=a(\varepsilon)$，又

$$G(a,\varepsilon)\overset{\text{def}}{=\!=}Pf(\cdot,x^*(a,\varepsilon))=0, \tag{1.6}$$

则 $x^*(a,\varepsilon)$ 是 (1.1) 的周期为 T 的解. 反之，如果 (1.1) 有以 T 为周期的解 $\bar{x}(\varepsilon)$，它对 ε 连续，当 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 时 $P\bar{x}(\varepsilon)=a(\varepsilon)$，$|a(\varepsilon)|\leqslant\alpha$，则 $\bar{x}(\varepsilon)=x^*(a(\varepsilon),\varepsilon)$，这里 $x^*(a,\varepsilon)$ 是上面给定的函数，而 $a(\varepsilon)$ 对于 $0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 满足(1.6).

证明 假设给定了 $\alpha>0$，又 β 是任意正数，而 a 是任意 $|a|\leqslant\alpha$ 的 n 维向量. 定义

$$\mathscr{S}(\beta)=\{y\in\mathscr{P}_T:\|y\|\leqslant\beta,Px=0\}$$

又对 $y\in\mathscr{S}(\beta)$ 定义算子 $\mathscr{F}:\mathscr{S}(\beta)\to\mathscr{P}_T$ 为

$$\mathscr{F}y=\varepsilon\mathscr{K}(I-P)f(\cdot,y+a). \tag{1.7}$$

如果 y 是 $\mathscr{F}$ 的不动点，则 $y+a$ 满足(1.5a). 设 M，N 分别是 $t\in R$，$|x|\leqslant\beta+\alpha$ 时 $|f(t,x)|$，$|\partial f(t,x)/\partial x|$ 的界，又取 ε_1 使得 $4\varepsilon_1TM<\beta$，$4\varepsilon_1TN<1/2$. 容易证明 $\mathscr{F}:\mathscr{S}(\beta)\to\mathscr{S}(\beta)$，并且对于 $|a|\leqslant\alpha$，$|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$，$\mathscr{F}$ 是一个一致压缩. 设 $y^*(a,\varepsilon)$ 是 $\mathscr{F}$ 在 $\mathscr{S}(\beta)$ 内的唯一不动点. 从一致压缩原理现在推出 $x^*(a,\varepsilon)=y^*(a,\varepsilon)+a$ 的存在性与在引理中陈述的性质. 如果 $a(\varepsilon)$ 满足(1.6)，则从引理 1.1 知 $x^*(a(\varepsilon),\varepsilon)$ 是(1.1)的解. 反之，如果 $\bar{x}(\varepsilon)$ 具备引理中陈述的性质，则存在 $\beta>\alpha$ 使得 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$ 时 $|\bar{x}(\varepsilon)-a(\varepsilon)|\leqslant\beta$. 对于这个 β，选取 $\varepsilon_0\leqslant\varepsilon_1$ 使得 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 时 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{S}(\beta)$ 上的一个压缩. 于是 $\bar{x}(\varepsilon)-a(\varepsilon)=y^*(a(\varepsilon),\varepsilon)$，$\bar{x}(\varepsilon)=x^*(a(\varepsilon),\varepsilon)$. 从引理 1.1 推出引理的结论.

引理1.2的断言如下：可以指定一个任意的 n 维向量 a，然后按照这样的方式来唯一地确定以 T 为周期的平均值等于零的函数 $x^*(a,\varepsilon)$，即使得函数 $\dot{x}^*(t)-f(t,x^*(t))$ 的所有 Fourier 系数除

开常数项以外全为零(这和说满足(1.5a)是一样的). 于是 n 维向量 a 被用来使常数项等于零(即满足(1.6)). 方程(1.6)有时叫作(1.1)的确定方程或分歧方程.

作为上述证明的一个结论，函数 $x^*(a,\varepsilon)$ 可作为序列 $\{x^{(k)}\}$ 的极限而得到，这里 $x^{(k)}=y^{(k)}+a$, $y^{(k)}$ 由

$$y^{(k+1)}=\mathscr{F}y^{(k)},\quad k=0,1,2,\cdots,$$
$$y^{(0)}=0$$

逐次确定，而 $\mathscr{F}$ 在(1.7)中定义. 只用一次近似，可以得到

定理 1.1 假设 $x^*(a,\varepsilon)$ 如引理 1.2 中所定义，又设 $G(a,\varepsilon)$ 由(1.6)定义. 如果有 n 维向量 a_0, 使得

$$G(a_0,0)=0,\quad \det\left[\frac{\partial G(a_0,0)}{\partial a}\right]\neq 0 \tag{1.8}$$

则存在一个 $\varepsilon_1>0$, 当 $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$ 时，(1.1)有以 T 为周期的解 $x^*(\varepsilon)$, $x^*(0)=a_0$, 且 $x^*(\varepsilon)$ 对 ε 连续可微.

证明 由假设(1.8)与隐函数定理推知存在一个 ε_1, $0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$, 使得方程(1.6)在 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$ 处有一个连续可微函数 $a(\varepsilon)$, $|a(\varepsilon)|<\alpha$. 引理 1.2 意味着定理的其它论断.

请注意

$$G(a,0)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t,a)dt, \tag{1.9}$$

因此不需要知道(1.1)的解的任何情况，便可计算. 把定理 1.1 与定理 V.3.2 进行比较. 你能用上面的方法证明定理 V.3.2 吗?

在应用中，甚至对于方程(1.1)，定理 1.1 也是不够一般的. 比较具体地说，有时必须知道在(1.6)的 $G(a,\varepsilon)$ 的 Taylor 展开中 ε 的一阶，二阶甚至高阶项. 除开所涉及的数字计算以外，要求得这些项在概念上没有什么困难. 为了求得 $G(a,\varepsilon)$ 中 ε 的一阶项，必须计算 $x^*(a,\varepsilon)$ 中 ε 的一阶项，等等. 这用迭代手续

$$x^{(k)}=y^{(k)}+a,$$
$$y^{(k+1)}=\mathscr{F}y^{(k)},\quad k=0,1,2,\cdots,$$
$$y^{(0)}=0$$

来完成，这里的映射 $\mathscr{F}$ 在(1.7)内定义.

容易把上面的结果推广到形如

$$\dot{z}=Bz+\varepsilon h(t,z) \tag{1.10}$$

的系统，这里 $h(t+T,z)=h(t,z)$，h 与 $\partial h/\partial z$ 在 $R\times C^{m+n}$ 内连续，$B=\mathrm{diag}(O_n,B_1)$，O_n 是 $n\times n$ 零矩阵，B_1 是一个 $m\times m$ 矩阵，使得 $e^{B_1T}-I$ 是非奇异矩阵. 这最后一个条件说明系统 $\dot{y}=B_1y$ 对于 $\mathscr{P}_T$ 是非临界的. 如果 $z=(x,y)$，$h=(f,g)$，这里 x，f 是 n 维向量，则上述系统等价于

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\varepsilon f(t,x,y),\\ \dot{y}&=B_1y+\varepsilon g(t,x,y).\end{aligned} \tag{1.10$'$}$$

对于 $\mathscr{P}_T$ 内任意 $h=(f,g)$，定义 Ph 为 $n+m$ 维常向量

$$Ph=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt\\ 0\end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

非齐次线性系统

$$\dot{z}=Bz+h(t) \tag{1.12}$$

有以 T 为周期的解，当且仅当 $Ph=0$. 并且，如果 $Ph=0$，设 $\mathscr{K}h$ 是(1.12)满足 $Pz=0$ 的唯一解 z. 对于 $\mathscr{P}_T$ 内任意 h，可因此定义 $\mathscr{K}(I-P)h$，而存在常数 $K>0$ 使得

$$\|\mathscr{K}(I-P)h\|\leqslant K\|h\|; \tag{1.13}$$

也就是说，$\mathscr{K}(I-P)$ 是由 $\mathscr{P}_T$ 入 $\mathscr{P}_T$ 的一个连续线性映射. (1.12)的每个以 T 为周期的解可以写作

$$z=a^*+\varepsilon\mathscr{K}h,\quad a^*=\begin{bmatrix}a\\ 0\end{bmatrix}.$$

这里 a 是一个 n 维常向量，使得$a^*=Pz$.

引理 1.3. 假设 P 由(1.11)定义，又 $\mathscr{K}(I-P)h$ 是

$$\dot{z}=Bz+(I-P)h$$

的唯一的以 T 为周期的解 $z, Pz=0$. 则仅当 $Ph(\cdot, z(\cdot))=0$ 时即仅当 $h(\cdot, z(\cdot))=(I-P)h(\cdot, z(\cdot))$时，$z(t)$是 (1.10)的一个以 T 为周期的解. 此外，系统(1.10)有一个以 T 为周期的解 z，当且仅当满足系统

$$\begin{aligned}&(a)\quad z=a^*+\varepsilon\mathscr{K}(I-P)h(\cdot, z(\cdot)),\quad a^*=\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix},\\&(b)\quad \varepsilon Ph(\cdot, z(\cdot))=0,\end{aligned}\tag{1.14}$$

这里 a 是一个 n 维常向量，由$a^*=Pz$给出.

引理 1.4. 对于任意 $\alpha>0$，存在一个 $\varepsilon_0>0$，使得对于 R^n 内任意满足$|a|\leqslant\alpha$ 的 a，$|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$，有唯一函数 $z^*=z^*(a, \varepsilon)$满足(1.14 a)．并且，$z^*(a, \varepsilon)$对于 a, ε 有连续的一阶导数，又 $z^*(a, 0)=a^*$. 如果对于 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 存在一个满足$|a(\varepsilon)|\leqslant\alpha$ 的 $a(\varepsilon)$，又

$$G(a, \varepsilon)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t, z^*(a, \varepsilon)(t))dt=0,\tag{1.15}$$

则 $z^*(a, \varepsilon)$ 是(1.10)的一个以 T 为周期的解. 反之，如(1.10)有一个周期为 T 的解 $\bar{z}(\varepsilon)$，它对 ε 连续，又有 $P\bar{z}(\varepsilon)=a^*(\varepsilon)$，$a^*=\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}$. $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$时$|a(\varepsilon)|\leqslant\alpha$， 则 $\bar{z}(\varepsilon)=z^*(a(\varepsilon), \varepsilon)$， 这里 $z^*(a, \varepsilon)$是上面给定的函数，而 $a(\varepsilon)$当 $0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$时满足(1.15).

定理 1.2. 假设 $z^*(a, \varepsilon)$如引理 1.4 中所定义的，而 $G(a, \varepsilon)$ 如(1.15)中所定义的. 如果有一个 n 维向量 a_0，使得

$$G(a_0, 0)=0,$$

$$\det\left[\frac{\partial G(a_0, 0)}{\partial a}\right]\neq 0,$$

则存在一个 $\varepsilon_1>0$，(1.10)当$|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$ 时有一个周期为T的解

$z^*(\varepsilon)$, $z^*(0)=a_0^*$, $a_0^*=\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$, 又 $z^*(\varepsilon)$ 对 ε 连续可微.

习题 1.1. 验证上面关于系统(1.10)所作的所有陈述, 又详细地证明引理 1.3, 1.4 与定理 1.2.

习题 1.2. 考虑方程

$$\dot{x}_1=x_2,$$
$$\dot{x}_2=-x_1+\varepsilon(1-x_1^2)x_2+\varepsilon p\cos(\omega t+\alpha),$$

这里 $p\neq 0$, $\varepsilon>0$, ω, α 是实数, $\omega^2=1+\beta$, $\beta\neq 0$. 寻找关于 p, ω, α 的条件, 以保证对于小的 ε, 这个方程有周期为 $2\pi/\omega$ 的解. 画出频率响应曲线. 设

$$x_1=z_1\sin\omega t+z_2\cos\omega t,$$
$$x_2=\omega(z_1\cos\omega t-z_2\sin\omega t),$$

又应用定理 1.1.

习题 1.3. 对于方程

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1=x_2,\\&\dot{x}_2=-\sigma^2x_1+\varepsilon(3\nu\cos 2t-x_1^3)-\varepsilon^2(\lambda x_2+\mu x_1)-\varepsilon^3\mu x_1^2,\end{aligned}\qquad(1.16)$$

(这里 $\sigma=1$)讨论存在二阶次调和解(即其周期是向量场周期的二倍的解)的可能性. 设

$$x_1=z_1\sin t+z_2\cos t,$$
$$x_2=z_1\cos t-z_2\sin t,$$

又应用定理 1.1.

习题 1.4. 对于 $\sigma=2/3$, $\lambda=\varepsilon\lambda_1$, 讨论(1.16)的三阶次调和解的存在性. 设

$$x_1=z_1\sin\sigma t+z_2\cos\sigma t,$$
$$x_2=\sigma(z_1\cos\sigma t-z_2\sin\sigma t),$$

又确定(1.6)中 $G(a,\varepsilon)$ 的直到包括与 ε 同阶的项的 Taylor 展开式, 又应用适当的隐函数定理.

习题 1.5. 对于 $\sigma=2/n$(n 是一个正整数), 证明由(1.16)有 n 阶次调和解可推知当 $e\to 0$ 时 λ 必是 $O(e^{n-2})$. 你不可能求得 $G(a,e)$的 Taylor 展开式的 n 项, 因此你必须讨论展开式的定性性质.

习题 1.6. 利用习题 1.5 的方法, 说明 Duffing 方程

$$\dot{x}_1=x_2,$$

$$\dot{x}_2=-(2n+1)^{-2}x_1-e^s c+eax_1+ebx_1^3+B\cos t$$

仅当 $s\geqslant n$ 时可能有一个 n 阶次调和解.

习题 1.7. 假设 $f(x,y)$是纯量 x,y 的一个连续可微的纯量函数, $f(0,0)=0$, 又对于所有 x,y, $f(x,-y)=f(x,y)$或 $f(-x,y)=-f(x,y)$. 给定任意 $\alpha>0$, 证明存在一个 $e_0>0$, 使得对于任意满足 $x_0^2+y_0^2<\alpha^2$ 的(x_0,y_0), 方程

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-x+ef(x,y)\end{aligned} \tag{1.17}$$

当$|e|\leqslant e_0$时有一个周期解. 这意味着平衡点 (0,0) 是一个中心. 设

$$x=\rho\sin\theta,$$

$$y=\rho\cos\theta,$$

对于(1.17)的轨道, 得到方程

$$\frac{d\rho}{d\theta}=eF(\rho,\theta,e).$$

如果 $f(-x,y)=-f(x,y)$, 注意 $F(\rho,-\theta,e)=-F(\rho,\theta,e)$. 说明在这种特殊情况下, (1.7)内的变换$\mathscr{F}$把 θ 的以 2π 为周期的偶函数映为 θ 的偶函数, 因此, 不动点必是偶函数. 这意味着$G(a,e)\equiv 0$. 如果 $f(x,-y)=f(x,y)$, 则令 $\theta=\phi+\pi$, 再用同样的论证.

习题 1.8. 考虑系统

$$\dot{x}_1=x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\mu x_1^3,$$

这里 $\mu>0$ 是小参数. 这个方程的一个第一积分是 $E(x_1, x_2) = x_2^2/2+\mu x_1^4/4$, 于是所有的轨道是周期轨道. 对于 $\mu=0$, 仅有的周期轨道是位于 x_1 轴上的平衡点. 你能用上面的扰动理论推导出这个结果吗? 如果 $\varepsilon=\sqrt{\mu}$, $x_1=z_1$, 又 $x_2=\varepsilon z_2$, 则

$$\dot{z}_1=\varepsilon z_2,$$
$$\dot{z}_2=-\varepsilon z_1^3,$$

它是系统(1.1)的特殊情形.

上面的理论对于确定某些类型有周期系数的线性系统的特征指数也是有用的. 比较具体地说, 考虑系统

$$\dot{w}=Cw+\varepsilon\Phi(t)w, \tag{1.18}$$

这里 ε 是一个参数, $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, w 是 $n+m$ 维向量, $\Phi(t)$ 是一个连续的①$(n+m)\times(n+m)$ 矩阵, $\Phi(t)=\Phi(t+T)$, 这里 $T=2\pi/\omega$, 又 $C=\mathrm{diag}(C_1, C_2)$ 是一个 $(n+m)\times(n+m)$ 常矩阵, 使得 $n\times n$ 矩阵 e^{C_1T} 的特征值都是 ρ_0, 而 e^{C_2T} 没有一个特征值是 ρ_0. 问题在于确定(1.18)的这些特征乘数, 它们当 $\varepsilon\neq0$ 时接近于 ρ_0.

假设 λ_1 是 C_1 的一个特征值, 于是 $\rho_0=e^{\lambda_1T}$. 从(1.18)的主矩阵解对 ε 的连续性与 Floquet 理论, 推知有乘数 $\rho(\varepsilon)=e^{\mu(\varepsilon)T}$, 它对 ε 连续, 又 $\mu(0)=\lambda_1$. 并且, 对于这个乘数必存在一个以 T 为周期的 $n+m$ 维向量 $p(t, \varepsilon)$, 使得 $e^{\mu(\varepsilon)t}p(t, \varepsilon)$ 是(1.18)的一个解. 反之, (1.18)的任意一个这样的解产生(1.18)的一个特征指数. 因此, 如果在(1.18)中作变换 $w=e^{\mu t}p$, 则

$$\dot{p}=(C-\mu I)p+\varepsilon\Phi(t)p, \tag{1.19}$$

而问题是确定 μ 使得(1.19)有以 T 为周期的解.

为使前面的理论可以直接应用, 假设 C_1 的特征值有单初等因

① Φ 可能是一个可积函数.

子. 则矩阵 $e^{(C_1-\lambda_1 I)t}$ 是周期为T的. 如果 $w=(u,v)$, 这里 u 是 n 维向量, v 是 m 维向量, 又 β 是任意的复数, 在(1.18)中作变换

$$\begin{aligned} u &= e^{(\lambda_1+\varepsilon\beta)t}e^{(C_1-\lambda_1 I)t}x, \\ v &= e^{(\lambda_1+\varepsilon\beta)t}y, \end{aligned} \tag{1.20}$$

得到

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\varepsilon\beta x+\varepsilon e^{-(C_1-\lambda_1 I)t}\Phi_{11}(t)e^{(C_1-\lambda_1 I)t}x+\varepsilon e^{-(C_1-\lambda_1 I)t}\Phi_{12}y, \\ \dot{y} &= [C_2-(\lambda_1+\varepsilon\beta)I]y+\varepsilon\Phi_{21}(t)e^{(C_1-\lambda_1 I)t}x+\varepsilon\Phi_{22}(t)y, \end{aligned} \tag{1.21}$$

这里我们已把Φ分块成 $\Phi=(\Phi_{ij})$.

由于 $e^{(C_1-\lambda_1 I)t}$ 是周期为T的, 系统(1.21)可以写作

$$\dot{z}=Bz+\varepsilon\Psi(t,\beta)z, \tag{1.22}$$

这里 $B=\operatorname{diag}(O_n,\ C_2-\lambda_1 I)$, $z=(x,\ y)$, 又对于所有 t, β 有 $\Psi(t+T,\beta)=\Psi(t,\ \beta)$. Ψ 的显式容易从(1.21)得到. 如果 β 可以这样来确定, 以致系统(1.22)有一个以T为周期的解 $z(t)$, 则这个解根据(1.20)产生(1.18)的一个形如

$$w(t)=e^{(\lambda_1+\varepsilon\beta)t}p(t),$$

$$(p(t+T)=p(t))$$

的解. 因此, $\lambda_1+\varepsilon\beta$ 是(1.18)的一个特征指数. 反之, 我们在上面已经看到每个这样的特征指数可以用这个方法得到.

由于系统(1.22)是系统(1.10)的特殊情形, 我们可以利用前面的理论. 引理 1.4 中给出的函数 z^* 现在将是 a,β 与 ε 的一个函数, 而(1.22)的线性意味着 $z^*(a,\ \beta,\ \varepsilon)=Z^*(\beta,\ \varepsilon)a$. 这里 $Z^*(\beta,\varepsilon)$ 是一个周期为T的 $(n+m)\times n$ 矩阵. 如果 $Z^*=\begin{bmatrix}X^*\\Y^*\end{bmatrix}$, 这里 X^* 是 $n\times n$ 矩阵, 则(1.15)中的函数 $G(a,\ \beta,\ \varepsilon)$ 对 a 也是线性的; 即 $G(a,\beta,\varepsilon)=D(\beta,\varepsilon)a$, 这里的 $D(\beta,\varepsilon)$ 可以从(1.22)直接计算, 它是

$$D(\beta, \varepsilon)=\frac{1}{T}\int_0^T[\Psi_{11}(t, \beta)X^*(\beta, \varepsilon)(t)$$

$$+\Psi_{12}(t, \beta)Y^*(\beta, \varepsilon)(t)]dt, \qquad (1.23)$$

这里Ψ被分块成$\Psi=(\Psi_{ij})$. 于是引理 1.4 意味着任意一个使得 $\det D(\beta, \varepsilon)=0$ 的β将产生(1.18)的一个特征指数$\lambda_1+\varepsilon\beta$.

习题 1.9. 假设$D(\beta, \varepsilon)$是在(1.23)中所给定的. 证明(1.18)的n个当$\varepsilon=0$时都等于ρ_0的特征乘数是方程$\det D(\beta, \varepsilon)=0$的$n$个根.

习题 1.10. 考虑系统

$$\dot{w}=Cw+\varepsilon\Phi(t)w, \qquad (1.24)$$

这里$\Phi(t)$连续, $\Phi(t+T)=\Phi(t)$, $C=\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 又对于某个固定的$j$,

$$e^{\lambda_j T}\neq e^{\lambda_k T}, \quad k=1, 2, \cdots, n, \quad k\neq j.$$

证明(1.24)的使得$\rho(0)=e^{\lambda_j T}$的特征乘数$\rho(\varepsilon)$由

$$\rho(\varepsilon)=e^{\mu(\varepsilon)T},$$

$$\text{当}\ \varepsilon\to 0\ \text{时}\ \mu(\varepsilon)=\lambda_j+\frac{\varepsilon}{T}\int_0^T\phi_{jj}(t)dt+o(\varepsilon)$$

给定, 其中$\Phi=(\phi_{ik})$, $i, k=1, 2, \cdots, n$.

习题 1.11. 假设系统

$$\ddot{x}+x=\varepsilon f(x, \dot{x}, y, \dot{y}),$$

$$\ddot{y}+\sigma^2 y=\varepsilon g(x, \dot{x}, y, \dot{y})$$

有一个周期为$2\pi/\omega(\varepsilon)$的周期解, $\omega(0)=1$, 当$\varepsilon=0$时, 这个周期解是$x=a\sin t$, $y=0$. 证明, 如果

$$\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(a\sin t, \ a\cos t, 0, 0)dt<0,$$

$$\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{\partial g}{\partial \dot{y}}(a\sin t, a\cos t, 0, 0)dt<0,$$

又$\sigma\neq$整数, 则这个周期解是具有渐近位相的渐近轨道稳定解.

相对于它的线性变分方程的特征乘数当 $e=0$ 时是 $1, 1, e^{2\pi i\sigma}$, $e^{-2\pi i\sigma}$. 关于 σ 的假设意味着 $e^{2\pi i\sigma}$ 与 $e^{-2\pi i\sigma}$ 都是单的. 因此, 只要变分方程的常数部分可被变换成对角型, 习题 1.10 就可用来求出这些乘数于 ε 的一阶改变量. 由于有一个乘数当 $\varepsilon\neq 0$ 时依旧恒等于一, 又乘数的积由一个众所周知的公式给出, 可以估算出另外的乘数的一阶改变量.

习题 1.12. 把习题1.11的结果推广到 n 个二阶方程的系统.

习题 1.13. 说明系统

$$\ddot{x}+x=e(1-x^2-y^2)\dot{x},$$
$$\ddot{y}+2y=\varepsilon(1-x^2-y^2)\dot{y}, \quad e>0$$

有两个非常数的周期解, 它们都是具有渐近位相的渐近轨道稳定解.

习题 1.14. 考虑 Mathieu 方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=-\sigma^2x_1-\varepsilon(\cos 2t)x_1,\end{aligned}\tag{1.25}$$

这里 $\sigma=\sigma(\varepsilon)$, 而 $\sigma(0)=m$ 是一个非负整数. 从第Ⅱ章中关于这个方程的一般理论, 我们知道这些 σ 值确实是引起不稳定性的. 事实上, 不稳定零点是由这些 σ 值来确定的, 对于它们, 方程(1.25)有一个周期为 π 或 2π 的周期解; 也就是说, 乘数是 $+1$ 或 -1. 试在 $\sigma(0)=1$, $\sigma(0)=2$ 这两种情况下近似地确定这些作为 e 的函数的 $\sigma(e)$ 值. 在(σ, ε)平面内点$(1,0)$, $(2,0)$的邻域内, 这些解是无界的吗? 设

$$x_1=z_1\sin mt+z_2\cos mt,$$
$$x_2=m[z_1\cos mt-z_2\sin mt],$$

又 $m^2-\sigma^2=e\beta$, 利用上面的理论来确定 β, 使得产生的方程有周期解.

习题 1.15. 在习题 1.14 中对于 $\sigma(0)=m$ 说明 $e\to 0$ 时 $\sigma^2(e)$

$=m^2+o(\varepsilon^m)$.

习题 1.16. 像习题1.14中那样在 $\sigma(0)=0$ 时讨论方程(1.25)，假设 $\varepsilon\geqslant 0$，令 $\sigma^2=\varepsilon\beta$，$x_1=z_1, x_2=\sqrt{\varepsilon}z_2$，从周期解的角度分析得到的方程.

习题 1.17. 对于什么 ω 值，方程

$$\ddot{x}+\sigma^2 x=\varepsilon(\sin\omega t)y,$$
$$\ddot{y}+\mu^2 y=\varepsilon(\cos\omega t)x$$

的所有解当 ε 小而 $\neq 0$ 时有界?

VIII.2. 殆线性系统

在这一节里，将把第1节中给出的一般扰动方案推广到系统

$$\dot{x}=B(t)x+\varepsilon f(t,x), \tag{2.1}$$

这里 $B(t+T)=B(t)$，$f(t+T,x)=f(t,x)$，对于所有 R 中的 t 与 C^n 中的 x，$\partial f(t,x)/\partial x$ 连续.

设 $n\times p$ 矩阵 $\Phi(t)$ 的列是

$$\dot{x}=B(t)x \tag{2.2}$$

的周期为 T 的解的一组基，又设 $p\times n$ 矩阵 $\Psi(t)$ 的行是伴随方程

$$\dot{y}=-yB(t) \tag{2.3}$$

的周期为 T 的解的一组基.

$p\times p$ 矩阵(下面"$'$"表示转置)

$$C=\int_0^T\Phi'(t)\Phi(t)dt,\quad D=\int_0^T\Psi(t)\Psi'(t)dt \tag{2.4}$$

都是非奇异的. 事实上，如果 $q(t)=\Phi(t)a$，又 $Ca=0$，则

$$\int_0^T q'(t)q(t)dt=0,$$

它意味着对$[0,T]$内所有 t 有 $q(t)=0$. 但这蕴涵着 $a=0$. 同样的论证对矩阵D成立.

与前面相同, 设 $\mathscr{P}_T$ 是连续的以T为周期的 n 维向量函数由一致拓扑而成的空间. 在(2.4)中 C, D 非奇异的事实使人们能够按下述方式定义 $\mathscr{P}_T$ 上的两个射影算子 P,Q

$$\begin{aligned} Pf&=\Phi(\cdot)a,\ \ a=C^{-1}\int_0^T\Phi'(t)f(t)dt,\\ Qf&=\Psi'(\cdot)b,\ \ b=D^{-1}\int_0^T\Psi(t)f(t)dt. \end{aligned} \tag{2.5}$$

容易检验这些是射影. 请注意P把 $\mathscr{P}_T$ 映到 $\mathscr{P}_T$ 的由 (2.2) 的以 T 为周期的解所张成的子空间, Q 把 $\mathscr{P}_T$ 映到 $\mathscr{P}_T$ 的由(2.3)的以 T 为周期的解的转置所张成的子空间. 这些定义的合理性是由于下述引理.

引理 2.1. 如果 f 是 $\mathscr{P}_T$ 的一个给定元素, 则方程

$$\dot{x}=B(t)x+f(t) \tag{2.6}$$

有周期为T的解的必要充分条件是 $Qf=0$. 如果 $Qf=0$, 则有唯一的周期为T的解 $\mathscr{K}f$, 使得 $P\mathscr{K}f=0$. 并且, $\mathscr{K}(I-Q)$是把 $\mathscr{P}_T$ 映入 $\mathscr{P}_T$ 的连续线性算子.

证明 引理的第一部分是引理 IV. 1.1 的复述. 如果 $Qf=0$, 则在 $\mathscr{P}_T$ 内有(2.6)的解. 如果 x_0 是 $\mathscr{P}_T$ 内任意解的初始值, 则 x_0 必定满足方程 $Ex_0=b$, 这里

$$\begin{aligned} E&=X(T)-I,\\ b&=\int_0^T X(T)X^{-1}(s)f(s)ds, \end{aligned}$$

而 $X(t)$是 $\dot{x}=B(t)x$ 的主矩阵解. 设 E^* 是E的右逆, 即一个把 E 的值域变入C^n 且满足$EE^*=I$ 的矩阵. 由于$Qf=0$ 意味着 b 在 E 的值域内, 故向量 $x_0=E^*b$ 对应于(2.6)在 $\mathscr{P}_T$ 内一个解 $x^*(f)$ 的初始值. 如果 $\mathscr{K}f=(I-P)x^*(f)$, 则算子 $\mathscr{K}$ 把 $\mathscr{P}_T$ 映入 $\mathscr{P}_T$,

而且显然是线性与连续的. 此外, $P\mathcal{K}f=0$ 且 $\mathcal{K}f$ 是(2.6)在 $\mathcal{D}_T$ 内仅有的 P 射影是零的解. 这就证明了引理 2.1.

推论 2.1. 如果 f 在 $\mathcal{D}_T$ 内, 又 a 是给定的一个 p 维向量, 则 $\dot{x}=B(t)x+(I-Q)f$ 的满足 $Px=\Phi(\cdot)a$ 的唯一解是 $\Phi a+\mathcal{K}(I-Q)f$.

例 2.1. 假设 $B=B(t)$ 是 $n\times n$ 常矩阵, $B=\mathrm{diag}(O_p, B_1)$, 这里 O_p 是 p 维零矩阵, 而 $e^{B_1T}-I$ 是非奇异的. 则 Φ, Ψ 可以取作

$$\Phi=\begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \Psi=\Phi'=[I_p, 0],$$

这里 I_p 是 $p\times p$ 单位矩阵. 容易看出(2.4)中的矩阵 C, D 与(2.5)中的算子 P, Q 由 $C=D=TI_p$.

$$Pf=Qf=\begin{bmatrix} \frac{1}{T}\int_0^T f_p(t)dt \\ 0 \end{bmatrix}$$

给出, 这里 f_p 记 f 的前 p 个分量. 这是与第 1 节中对方程 (1.10) 定义的算子相同的算子. 如果 $Qf=0$, 则 $\mathcal{K}f$ 的显式是

$$(\mathcal{K}f)(t)=\begin{bmatrix} \int^t f_p(s)ds \\ (e^{-B_1T}-I)^{-1}\int_0^T e^{-B_1s}f_{n-p}(t+s)ds \end{bmatrix},$$

这里 $\int^t f_p$ 是 f_p 的唯一平均值等于零的原函数, 而 f_{n-p} 表示 f 的后 $n-p$ 个分量.

例 2.2. 假设 $B=B(t)$ 是常矩阵, 且

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

我们可以取 $\Phi=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\Psi=(0, 1)$. 则 $C=D=T$, 而

$$Pf=\Phi(\cdot)a=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f_1(s)ds\right),$$

$$Qf=\Psi'(\cdot)b=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f_2(s)ds\right),$$

这里 $f=(f_1,f_2)$. 如果 $Qf=0$, 容易算出 $\mathscr{K}f$ 是

$$(\mathscr{K}f)(t)=\begin{bmatrix}\int^T\left[f_1(s)-\frac{1}{T}\int_0^T f_1+\int^s f_2\right]ds\\-\frac{1}{T}\int_0^T f_1+\int^t f_2\end{bmatrix},$$

这里"$\int^t$"仍记被积项的平均值等于零的原函数.

引理 2.2. 如果算子 P, Q 与 $\mathscr{K}$ 如(2.5)与引理 2.1 中所定义的, 则系统(2.1)有一个周期为 T 的解 x, 当且仅当 x 满足系统

$$\begin{aligned}&(a)\quad x=Px+\varepsilon\mathscr{K}(I-Q)f(\cdot,x),\\&(b)\quad \varepsilon Qf(\cdot,x)=0.\end{aligned}\tag{2.7}$$

证明 假设 x 是 $\mathscr{P}_T$ 的任意元素. 我们首先说明 $Q(\dot{x}-Bx)=0$. 事实上, 从(2.5)有

$$\begin{aligned}Q(\dot{x}-Bx)&=\Psi'D^{-1}\int_0^T\Psi(t)[\dot{x}(t)-B(t)x(t)]dt\\&=\Psi'D^{-1}\int_0^T[\Psi(t)\dot{x}(t)+\dot{\Psi}(t)x(t)]dt\\&=\Psi'D^{-1}[\Psi(t)x(t)]_0^T=0.\end{aligned}$$

$\mathscr{P}_T$ 的一个元素 x 是(2.1)的解, 当且仅当

$$Q(\dot{x}-Bx)=\varepsilon Qf(\cdot,x),$$

$$(I-Q)(\dot{x}-Bx)=\varepsilon(I-Q)f(\cdot,x).$$

由于 $Q(\dot{x}-Bx)=0$, 这些方程等价于(2.7b)与 $\dot{x}-Bx=(I-Q)\times f(\cdot,x)$. 引理 2.1 意味着后面这个方程等价于(2.7a), 引理证毕.

引理 2.3. 对于任意 $\alpha>0$, 有一个 $\varepsilon_0>0$ 使得对于任何 $|a|\leqslant\alpha$ 的 p 维常向量 a 与 $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, 存在唯一的满足

$$x^* = \Phi a + \varepsilon \mathscr{K}(I-Q)f(\cdot, x^*) \tag{2.8}$$

的函数 $x^* = x^*(a, \varepsilon)$. 并且, $x^*(a, \varepsilon)$对于 a, ε 有连续的一阶导数, 并且 $x^*(a, 0) = 0$. 如果 $0 \leqslant |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ 时有一个满足$|a(\varepsilon)| \leqslant \alpha$ 的 $a = a(\varepsilon)$, 又

$$G(a, \varepsilon) \xlongequal{\text{def}} Qf(\cdot, x^*(a, \varepsilon)) = 0, \tag{2.9}$$

则 $x^*(a, \varepsilon)$是(2.1)的一个以T为周期的解. 反之, 如果(2.1)当 $0 \leqslant |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ 时有一个周期为T的解 $\bar{x}(\varepsilon)$, 它对 ε 连续, 又有 $P\bar{x}(\varepsilon) = \Phi a(\varepsilon)$, $|a(\varepsilon)| \leqslant \alpha$, 则 $\bar{x}(\varepsilon) = x^*(a(\varepsilon), \varepsilon)$, 这里 $x^*(a, \varepsilon)$ 是上面定义的函数, 又 $a(\varepsilon)$当 $0 < |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ 时满足(2.9).

证明 假设 $\alpha > 0$ 被给定, 又 a 是任意的$|a| \leqslant \alpha$ 的 p 维向量. 设β是一个正数, 使得$|a| \leqslant \alpha$ 时$\|\Phi a\| \leqslant \beta$. 对于任意 $\gamma > 0$, 定义

$$\mathscr{S}(\gamma) = \{y \in \mathscr{P}_T : Py = 0, \|y\| \leqslant \gamma\},$$

又对于 $\mathscr{S}(\gamma)$内的 y 定义算子 $\mathscr{F}: \mathscr{S}(\gamma) \to \mathscr{P}_T$ 为

$$\mathscr{F}y = \varepsilon \mathscr{K}(I-Q)f(\cdot, y + \Phi a). \tag{2.10}$$

如果 $y^*(a, \varepsilon)$是 $\mathscr{F}$ 在 $\mathscr{S}(\gamma)$内的一个不动点, 则 $x^*(a, \varepsilon) = \Phi a + y^*(a, \varepsilon)$是(2.8)的一个解. 现在证明正好像引理 1.2 的证明那样进行.

从应用的观点来看, 注意到 (2.5) 这个关系意味着 (2.9) 中 $G(a, \varepsilon) = 0$ 等价于

$$F(a, \varepsilon) \xlongequal{\text{def}} \int^T \Psi(t) f(t, x^*(a, \varepsilon)(t)) dt = 0 \tag{2.11}$$

这一事实, 是方便的.

引理 2.3 断言下述事实: 可以预先任意地指定由$\{f \in \mathscr{P}_T : Pf = f\}$所定义的 $\mathscr{P}_T$ 的子空间的一个元素 $x_P = \Phi a$, 然后在(2.7a)中以x_P 代替 Px 确定唯一的解. 于是元素 x_P 被用来试解余下的方程(2.7b).

方程(2.9)或(2.11)被称为(2.1)的确定方程或分歧方程, 由

于 (2.10) 中的 $\mathscr{F}$ 是一个压缩算子，分歧方程可用逐次逼近法确定。对于 $x^*(a,\varepsilon)$ 仅取一次近似 Φa，又利用隐函数定理，可以得到

定理 2.1. 假设 $x^*(a,\varepsilon)$ 如引理 2.3 中所定义，又设 $F(a,\varepsilon)$ 由(2.11)定义。如果有一个 p 维向量 a_0，使得

$$F(a_0,0)=0,$$
$$\det\left[\frac{\partial F(a_0,0)}{\partial a}\right]\neq 0,$$

则存在一个 $\varepsilon_1>0$，当 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$ 时有 (2.1) 的周期为 T 的解 $x^*(\varepsilon)$，$x^*(0)=\Phi a$，并且 $x^*(\varepsilon)$ 对 ε 连续可微。

习题 2.1. 如果 f 在 $\mathscr{P}_T$ 内，又 $Qf=0$，试给出一个确定引理 2.1 的 $\mathscr{P}_T$ 中的函数 $\mathscr{K}f$ 的构造性手续。

习题 2.2. 陈述与证明本节结果对于方程

$$\dot{x}=B(t)x+f(t,x,\varepsilon)$$

的相应的推广，这里 $B(t)$，$f(t,x,\varepsilon)$ 都是 $(t,x,\varepsilon)\in R\times C^n\times C$ 的连续函数，$B(t+T)=B(t)$，$f(t+T,x,\varepsilon)=f(t,x,\varepsilon)$，又对于 $t\in R$，$\varepsilon\in C$，$x,y\in C^n$，$|x|<\sigma$，$|y|<\sigma$ 有

$$f(t,0,0)=0,$$
$$|f(t,x,\varepsilon)-f(t,y,\varepsilon)|\leqslant\eta(|\varepsilon|,\sigma)|x-y|,$$

这里的 $\eta(\alpha,\sigma)$ 是 $\alpha\geqslant 0,\sigma\geqslant 0$ 的连续非降函数，$\eta(0,0)=0$。

习题 2.3. 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=\varepsilon[(\sigma+\alpha\cos 2t)x_1+bx_1^3+cx_2],\end{aligned}\tag{2.12}$$

这里 σ,α,b,c 都是常数。试找出关于这些常数的条件，以保证存在周期是 π 的解。这些解的稳定性质如何？

习题 2.4. 寻找关于 σ 的条件，使得(2.12) 当 $b=c=0$ 时有一个周期是 π 的解。借助 Mathieu 方程的理论来解释你的结果。

如果系统(2.1)有某些附加性质，有时可能不用任何逐次逼近而定性地陈述分歧方程(2.9)或(2.11). 下面用少数几页专门研究这个问题.

定义 2.1. 设在微分系统 $\dot{x}=g(t,x)$ 中，x, g 是 n 维向量. 如果存在一个对称的 $n\times n$ 常矩阵 S，使得 $S^2=I$，又对所有 t,x 有

$$Sg(-t,Sx)=-g(t,x),$$

则说此系统相对于 S 有性质(E).

如果 $x(t)$ 是一个相对于 S 有性质 (E) 的系统的解. 注意 $Sx(-t)$ 也是一个解. 事实上，如果 x 是这样一个系统的一个解，又 $w(t)=Sx(t)$，则

$$\begin{aligned}\dot{w}(t)&=S\dot{x}(t)=Sg(t,x(t))=Sg(t,S^{-1}w(t))\\&=Sg(t,Sw(t))=-g(-t,w(t)).\end{aligned}$$

这意味着 $w(-t)=Sx(-t)$ 是原方程的一个解.

引理 2.4. 假设 S 是一个 $n\times n$ 对称矩阵，$S^2=I$，$B(t)$ 是一个 $n\times n$ 连续矩阵，$B(t)=B(t+T)$，又 $f(t)$ 是一个 n 维连续向量，$f(t)=f(t+T)$，它们使得

$$\begin{aligned}&(a)\quad SB(-t)=-B(t)S,\\&(b)\quad Sf(-t)=-f(t).\end{aligned}\tag{2.13}$$

设 $n\times p$ 矩阵 Φ 的各列是(2.2)的周期为 T 的解的一组基，$\mathscr{K}$ 是在引理 2.1 中所定义的，又 Q 如(2.5)中的那样. 则

$$\begin{aligned}&(a)\quad \text{如果 } S\Phi(0)a=\Phi(0)a\text{，对于所有 } t \text{ 有}\\&\qquad\ S\Phi(-t)a=\Phi(t)a,\\&(b)\quad S(Qf)(-t)=-(Qf)(t),\\&(c)\quad S[\mathscr{K}(I-Q)f](-t)=[\mathscr{K}(I-Q)f](t).\end{aligned}\tag{2.14}$$

证明 B 满足(2.13)的事实意味着系统 (2.2) 相对于 S 有性质(E)，因此，如果 $S\Phi(0)a=\Phi(0)a$，则由解的唯一性推知对所有 t 有 $S\Phi(-t)a=\Phi(t)a$. 这证明了(2.14a). 矩阵 $S\Phi(-t)$ 的各

列是(2.2)的周期为T的解的一组基，因此，有一个 $p\times p$ 的非奇异矩阵 Γ，使得对于所有 t 有 $S\Phi(-t)=\Phi(t)\Gamma$. 按照同样的方法知道，有一个 $p\times p$ 的非奇异矩阵 M，使得对于所有 t 有 $\Psi(-t)S=M\Psi(t)$.

对于满足(2.13b)的任意 f，我们从(2.5)与 $S'=S$ 知有

$$
\begin{aligned}
S(Qf)(-t) &= S\Psi'(-t)D^{-1}\int_0^T \Psi(\alpha)f(\alpha)d\alpha \\
&= \Psi'(t)M'D^{-1}\int_0^T \Psi(-\alpha)f(-\alpha)d\alpha \\
&= -\Psi'(t)M'D^{-1}\int_0^T \Psi(-\alpha)Sf(\alpha)d\alpha \\
&= -\Psi'(t)M'D^{-1}M\int_0^T \Psi(\alpha)f(\alpha)d\alpha.
\end{aligned}
$$

另一方面，从(2.4)与 $S'=S, S^2=I$，可以说明 $MDM'=D$. 因此，$M'D^{-1}M=D^{-1}$，又

$$
\begin{aligned}
S(Qf)(-t) &= -\Psi'(t)D^{-1}\int_0^T \Psi(\alpha)f(\alpha)d\alpha \\
&= -(Qf)(t).
\end{aligned}
$$

这证明了(2.14b).

如果 f 满足(2.13b)，则由(2.14b)推知$(I-Q)f$满足

$$S(I-Q)f(-t)=-(I-Q)f(t).$$

因此，为了证明(2.14c)，只要说明以 f 代替$(I-Q)f$，(2.14c)被满足就够了. 我们首先说明 $PS(\mathcal{K}f)(-\cdot)=0$. 根据(2.5)，这是正确的，当且仅当

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \Phi'(t)S(\mathcal{K}f)(-t)dt \\
&= \Gamma'\int_0^T \Phi'(-t)(\mathcal{K}f)(-t)dt \\
&= \Gamma'\int_0^T \Phi'(t)(\mathcal{K}f)(t)dt.
\end{aligned}
$$

由于$P\mathscr{K}f=0$，推得$\int_0^T \Phi'(t)(\mathscr{K}f)(t)dt=0$. 因此$PS(\mathscr{K}f)(-\cdot)=0$. 由于$\mathscr{K}f$是(2.6)满足$P\mathscr{K}f=0$的唯一解，又$S\mathscr{K}f(-\cdot)$也是这同一方程的$P$射影为零的解，推出(2.14c)正确. 这就证明了引理.

定理 2.2. 设$n\times p$矩阵Φ的各列是(2.2)的周期为T的解的一组基，又设$p\times n$矩阵Ψ的各行是(2.3)的周期为T的解的一组基. 设$x^*(a,\varepsilon)$是在引理2.3中确定的函数，又假设系统(2.1)相对于S有性质(E). 则只要$(I-S)\Phi(0)a=0$，对所有t就有

$$Sx^*(a,\varepsilon)(-t)=x^*(a,\varepsilon)(t). \tag{2.15}$$

此外，如果$F(a,\varepsilon)$像(2.11)中那样定义，则

$$(I+M)F(a,\varepsilon)=0. \tag{2.16}$$

这里M是使$\Psi(-t)S=M\Psi(t)$的矩阵.

证明 假设$S\Phi(0)a=\Phi(0)a$；设$\mathscr{S}(\gamma)$如同引理2.3的证明中所定义，而$\mathscr{S}^*(\gamma)$是$\mathscr{S}(\gamma)$的一个子集，它由$\mathscr{S}(\gamma)$中满足$Sy(-t)=y(t)$的这些y组成. 从引理2.4知，$\mathscr{F}y=\varepsilon\mathscr{K}(I-Q)f(\cdot,y+\Phi a)$当$|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$时属于$\mathscr{S}^*(\gamma)$，这里$\varepsilon_0$在引理2.3中给出. 由于这个算子在$\mathscr{S}(\gamma)$内有唯一的不动点$y^*(a,\varepsilon)$，$Sy^*(a,\varepsilon)\times(-t)=y^*(a,\varepsilon)(t)$. 因此，(2.14a)意味着$x^*(a,\varepsilon)=y^*(a,\varepsilon)+\Phi a$满足关系(2.15). 利用(2.15)，性质$(E)$与$\Psi(-t)S=M\Psi(t)$的事实，得到

$$\begin{aligned}F(a,\varepsilon)&=\int_0^T \Psi(t)f(t,x^*(a,\varepsilon)(t))dt\\&=\int_0^T \Psi(t)f(t,Sx^*(a,\varepsilon)(-t))dt\\&=-\int_0^T \Psi(t)Sf(-t,x^*(a,\varepsilon)(-t))dt\\&=-M\int_0^T \Psi(-t)f(-t,x^*(a,\varepsilon)(-t))dt\\&=-MF(a,\varepsilon).\end{aligned}$$

这就证明了定理.

在应用中，定理 2.2 特别是表示为(2.16)的结论是很有用的. 这个关系式说只要 p 维向量 a 满足 $(I-S)\Phi(0)a=0$，则由(2.11)中的向量 F 的各个分量给出的分歧函数是相关的. 这对于(2.1)可以引出涉及周期解族存在性的结果. 下列习题说明了这一点，而且牵涉到性质(E)表示(2.1)中的函数的某种奇偶性的情况.

习题 2.5. 假设对于所有 $t\in R$ 与 $x\in R^n$，$f(-t,x)=-f(t,x)$ 成立. 证明系统 $\dot{x}=\varepsilon f(t,x)$ 当 ε 小时有一个含 n 个参数的周期解族. 如果 $f(t,x)=A(t)x$. 又 $A(-t)=A(t)$，这特别意味着所有特征乘数是 1.

习题 2.6. 借助于定理 2.2 再考虑习题 1.7.

习题 2.7. 如果 $g(y,-\dot{y},\ddot{y})=-g(y,\dot{y},\ddot{y})$，证明方程

$$\dddot{y}+\sigma^2\dot{y}=\varepsilon g(y,\dot{y},\ddot{y}),\quad \sigma\neq 0$$

对于小的 ε，在 $y=\dot{y}=\ddot{y}=0$ 的某个邻域内，所有解是周期解. 把这个方程写成三阶系统 $\dot{x}=A(\sigma^2)x+\varepsilon f(t,x)$，令 $x=[\exp A(\tau^2)t]z$，其中 $\tau^2=\sigma^2+\varepsilon\beta$，把 β 当作一个待定参数，对 z 的方程应用前面的结果.

习题 2.8. 考虑二阶方程系统

$$\ddot{u}+\sigma^2u=\varepsilon g_1(u,\dot{u},v,\dot{v}),$$

$$\ddot{v}+\mu^2v=\varepsilon g_2(u,\dot{u},v,\dot{v}),$$

这里 $\sigma\neq m\mu$，$\mu\neq m\sigma$ 对于 $m=0,\pm1,\cdots$成立，又

$$g_1(-u,\dot{u},v,-\dot{v})=-g_1(u,\dot{u},v,\dot{v}),$$

$$g_2(-u,\dot{u},v,-\dot{v})=g_2(u,\dot{u},v,\dot{v}).$$

证明这个系统有包含二个参数的周期解族. 令 $x_1=u$，$x_2=\sigma\dot{u}$，$x_3=v$，$x_4=\mu\dot{v}$，得到一个四阶系统 $\dot{x}=A(\sigma,\mu)x+\varepsilon f(x)$，这里 $A(\sigma,\mu)=\mathrm{diag}(B(\sigma),B(\mu))$，$x=(y,z)$，$y$，$z$ 是二维向量，又令 $y=[\exp B(\tau)t]Y$，$z=Z$，$\tau=\sigma+\varepsilon\beta$，再把 β 作为一个待定参数，对于

(Y, Z)的方程应用定理 2.2. 把这个结果推广到另外的对称类型以及含 n 个 2 阶方程的系统.

定义 2.2. 系统

$$\dot{x}=g(t,x) \tag{2.17}$$

的一个初积分是这样一个函数 $u:R\times C^n\to C$, 它有连续的一阶偏导数, 使得对于所有 t, x 有

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}g(t,x)+\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=0.$$

如果 $x(t, t_0, x_0)$ 是(2.17) 的满足 $x(t_0, t_0, x_0)=x_0$ 的解, 又 u 是(2.17)的一个初积分, 则对于 $x(t, t_0, x_0)$有定义的所有 t, $u(t, x(t, t_0, x_0))=u(t_0, x_0)$. 如果 $t_0=0$, 我们把(2.17) 的一个解写作$x(t, x_0)$, $x(0, x_0)=x_0$.

设 $V(t,x_0)=\partial x(t,x_0)/\partial x_0$. 在第 I 章中, 我们已经看到$V$是方程

$$\begin{aligned}&\dot{z}=Hz,\\&H=H(t,x_0)=\partial g(t,x(t,x_0))/\partial x\end{aligned} \tag{2.18}$$

的一个主矩阵解.

引理 2.5. 如果 u 是 (2.17) 的一个初积分, 它有连续的二阶偏导数, 则 $u_x(t,x)\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\partial u(t,x(t,x_0))/\partial x$ 是伴随方程

$$\dot{w}=-wH \tag{2.19}$$

的一个解, 这里H被定义在(2.18)中.

证明 由于对所有 t 与所有 x_0 有 $u(t,x(t,x_0))=u(0,x_0)$, 推知对所有 t 有 $u_x(t,x(t, x_0))V(t, x_0)=u_x(0, x_0)$. 把这个关系式对 t 求导数, 得知对所有 t

$$0=\dot{u}_xV+u_x\dot{V}=[\dot{u}_x+u_xH]V.$$

由于V是非奇异的, u_x 必定满足(2.19), 这就证明了引理.

引理 2.6. 如果 $u(t,x,e)$是(2.1)的初积分, $u(t+T, x, e)=$

$u(t,x,\varepsilon)$，它对于 t 与 x 有连续的二阶偏导数，又 $x^*(a,\varepsilon)$ 是引理 2.3 中给出的周期为 T 的函数，则当 $\varepsilon\neq 0$ 时

$$\int_0^T [u_x Qf]_{x=x^*(a,\varepsilon)}(t)dt=0, \tag{2.20}$$

这里 Q 的定义是(2.5)。

证明 由于 u 是(2.1)的初积分，我们特别地有

$$\int_0^T [u_x(Bx+\varepsilon f)+u_t]_{x=x^*(a,\varepsilon)}(t)dt=0.$$

由于 $x^*(a,\varepsilon)(t)$ 与 $u(t,x,\varepsilon)$ 都是 t 的周期为 T 的函数，我们又有

$$\begin{aligned}0&=\int_0^T \frac{d}{dt}[u(t,x^*(a,\varepsilon)(t),\varepsilon)]dt\\&=\int_0^T [u_x\dot{x}^*+u_t]_{x=x^*(a,\varepsilon)}(t)dt\\&=\int_0^T [u_x(Bx+\varepsilon f-\varepsilon Qf)+u_t]_{x=x^*(a,\varepsilon)}(t)dt.\end{aligned}$$

把这两个表示式相减，便给出(2.20)，这就证明了引理。

假设 $x^*(a,\varepsilon)$ 是引理 2.3 给出的周期为 T 的函数，又假设 $u(t,x,\varepsilon)=u(t+T,x,\varepsilon)$ 是(2.1)的一个初积分，并且 $u_x(t,0,0)\neq 0$. 根据引理 2.5，推知 $u_x(t,0,0)$ 是 $\dot{w}=-wB(t)$ 的一个非平凡的周期为 T 的解. 由于 $x^*(0,0)=0$，$u_x(t,x^*(0,0)(t),0)=u_x(t,0,0)\neq 0$ 是伴随方程 $\dot{w}=-wB(t)$ 的一个周期为 T 的解. 用 $p\times n$ 矩阵 Ψ 的各行定义这个方程周期为 T 的解的一组基，这意味着有 p 维行向量 $h\neq 0$，使得 $u_x(t,0,0)=h\Psi(t)$. 显然，有一个连续函数 $\mu(t,a,\varepsilon)=\mu(t+T,a,\varepsilon)$，使得 $\mu(t,0,0)=0$，而且

$$\begin{aligned}u_x(t,x^*(a,\varepsilon)(t),\varepsilon)&=u_x(t,0,0)+\mu(t,a,\varepsilon)\\&=h\Psi(t)+\mu(t,a,\varepsilon).\end{aligned}$$

如果 $F(a,\varepsilon)$ 的定义是(2.11)，则(2.5)意味着对于 $0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$，可把方程(2.20)写成

$$0=\int_0^T [h\Psi(t)+\mu(t,a,\varepsilon)]\Psi'(t)D^{-1}F(a,\varepsilon)dt$$

$$=[h+\int_0^T \mu(t,a,\varepsilon)\Psi'(t)D^{-1}dt]F(a,\varepsilon).$$

由于 h 不是零向量, 又 $\mu(t,0,0)=0$, 故有 $\alpha_1\neq 0$, $\varepsilon_1\neq 0$ 使得对于 $|a|\leqslant\alpha_1$, $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$ 有

$$h+\int_0^T \mu(t,a,\varepsilon)\Psi'(t)D^{-1}dt=h_1\neq 0.$$

因此, 在 F 的各个分量之间存在着线性关系; 也就是说, 在(2.1)的分歧函数之间有线性关系. 如果(2.1)有一个初积分 $u(t,x,\varepsilon)$, 满足 $u(t,x,\varepsilon)=u(t+T,x,\varepsilon)$, $u_x(t,0,0)\neq 0$, 则有一个分歧函数是多余的.

假设 $u_1,\cdots,u_k$ 都是(2.1)的初积分, 记 $u=(u_1,\cdots,u_k)$. 如果矩阵 $u_x(t,0,0)=\partial u(t,0,0)/\partial x$ 的秩是 r, 我们说 $u_1,\cdots,u_k$ 是线性无关的. 利用与上面相同的论证, 得到

定理 2.3. 设 $k\leqslant p$, $u=(u_1,\cdots,u_k)$ 是(2.1)的线性无关的初积分, $u(t+T,x,\varepsilon)=u(t,x,\varepsilon)$, $u(t,x,\varepsilon)$ 连续, 它对于 t,x 的二阶偏导数也连续. 则存在 $\alpha_1>0$, $\varepsilon_1>0$ 与秩为 k 的 $k\times p$ 矩阵 H, 使得 $|a|\leqslant\alpha_1$, $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$ 时 $HF(a,\varepsilon)=0$, 这里 $F(a,\varepsilon)$ 在(2.11)中定义. 如果 $k=p$, 那末存在一个以 T 为周期的解的 p 参数族 $x^*(a,\varepsilon)$, $|a|\leqslant\alpha_1$, $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$, 这里 $x^*(a,\varepsilon)$ 由引理2.3给出.

这个定理的第一部分的证明基本上和上面对 $k=1$ 的情况的论证相同. 如果 $k=p$, 则 H 是一个非奇异矩阵, 而 $HF(a,\varepsilon)=0$ 意味着 $|a|\leqslant\alpha_1$, $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$ 时 $F(a,\varepsilon)=0$; 也就是说分歧方程自动满足. 再应用引理 2.3, 便完成了定理的证明.

习题 2.9. (Liapunov 定理). 假设在系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=\sigma x_2+f_1(x_1,x_2,y),\\ \dot{x}_2&=-\sigma x_1+f_2(x_1,x_2,y),\end{aligned}\qquad(2.21)$$

$$\dot{y}=Cy+g(x_1,x_2,y),$$

中 $\sigma>0$, x_1,x_2 是纯量, y 是 m 维向量, f_1, f_2, g 在 $x_1=0=x_2, y=0$ 的邻域内是解析的, 其幂级数开始项至少是二次的. 假设这个系统有一个初积分 $W(x_1,x_2,y)$, 它对 x_1,x_2,y 的二阶导数连续, 又常矩阵 C 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 满足 $\lambda_k\neq i\sigma n, k=1,2,\cdots, m$ 而 n 为任何整数. 试证明这个系统有包含两个参数的周期解族. 在(2.21)中引进极型坐标

$$x_1=\rho\cos\sigma\theta,$$

$$x_2=-\rho\sin\sigma\theta,$$

又在得到的方程中消去 t, 得到作为 θ 的函数 ρ, y 的微分方程. 设 $\rho\to\varepsilon\rho, y\to\varepsilon y$, 又利用定理 2.3. 如果 C 的所有特征值是纯虚数, 存在另外的周期解族吗? 为了存在另外的周期解族, 补充什么条件就足够了? 必须假定 f_1,f_2,g 解析吗?

习题 2.10. 对于特殊的 n 阶纯量方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}=\varepsilon f(t,y)$$

解释这一节的一般理论.

习题 2.11. 考虑系统

$$\dot{w}=A_0w+\varepsilon\Phi(t)w, \tag{2.22}$$

这里 $\Phi(t+T)=\Phi(t)$ 是一个连续的 $n\times n$ 矩阵, 而 A_0 是一个常矩阵. 试按照本节的精神给出一个构造性手续, 以求(2.22)的形如 $U(t, \varepsilon)\exp[B(\varepsilon)t]$ 的主矩阵解, 这里 $U(t+T, \varepsilon)=U(t, \varepsilon)$, $U(t,0)=I, B(0)=A_0$. 考虑 $n\times n$ 矩阵方程

$$\dot{W}=AW+\varepsilon\Phi(t)W, \tag{2.23}$$

又对于任意给定的 $n\times n$ 常数矩阵 A_1, 设 $W=U\exp[(A_0-A_1)t]$. U 的微分方程是

$$\dot{U}=A_0U-UA_0+UA_1+\varepsilon\Phi(t)U. \tag{2.24}$$

试确定非齐次矩阵方程

$$\dot{U}=A_0U-UA_0+F(t),$$
$$F(t+T)=F(t)$$

有周期为T的解的必要充分条件. 利用这个事实得到一组矩阵方程$\Gamma(A_1, \varepsilon)=0$, 它的解对于求(2.24)的周期为$T$的矩阵解是必要而且充分的. 说明总有矩阵函数$A_1(\varepsilon)$, 使得对于小的$\varepsilon$有$\Gamma(A_1(\varepsilon), \varepsilon)=0$.

习题 2.12. 把习题 2.11 推广到殆周期矩阵扰动 $\Phi(t)$ 类.

习题 2.13. 如果在(2.22)中 A_0 是一个周期为T的矩阵函数, 为了能得到主矩阵解, 习题 2.11 的手续应如何修改?

Ⅷ.3. 被扰动的自治方程的周期解

在这节里, 利用本章的方法而不是用在周期轨道附近的坐标系来证明定理 Ⅵ.4.1 的一部分. 考虑方程

$$\dot{x}=f(x)+F(x, \varepsilon). \tag{3.1}$$

这里$f: R^n \to R^n$ 与$F: R^{n+1} \to R^n$都连续, $f(x)$, $F(x, \varepsilon)$有对x连续的一阶偏导数, 又对于所有x有$F(x, 0)=0$. 如果系统

$$\dot{x}=f(x) \tag{3.2}$$

有一个非常数的周期为ω的周期解$u(t)$, 它的轨道是$\mathscr{C}$, 则对于u的线性变分方程是

$$\dot{y}=A(t)y, \tag{3.3}$$

$$A(t)=\frac{\partial f(u(t))}{\partial x},$$

而这个线性周期系统总是至少有一个特征乘数等于 1.

定理 3.1. 如果 1 是(3.3)的单乘数, 则有一个$\varepsilon_0\neq 0$与$\mathscr{C}$的一个邻域W使得方程(3.1)对于$0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$有一个周期为$\omega^*(\varepsilon)$的周期解$u^*(\cdot, \varepsilon)$, 使$u^*(\cdot, 0)=u(\cdot)$, $\omega^*(0)=\omega$, 又对于R

内的 t 与 $0\leqslant|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, $u^*(t,\varepsilon)$与 $\omega^*(\varepsilon)$对 t,ε 都是连续的.

证明 设 $\mathscr{P}_\omega$ 是周期为 ω 的 n 维连续向量函数由上确界范数所成的空间. 对于任意实数 β, 考虑在 (3.1) 内的变换 $t=(1+\beta)\tau$. 如果 $x(t)=y(\tau)$, 则 y 满足方程

$$\frac{dy}{d\tau}=(1+\beta)[f(y)+F(y,\varepsilon)]. \tag{3.4}$$

如果(3.4)在 $\mathscr{P}_\omega$ 内有一个解, 则(3.1)在 $\mathscr{P}_{(1+\beta)\omega}$ 内有一个解. 如果 $y(\tau)=u(\tau)+z(\tau)$, 则 z 满足方程

$$\frac{dz}{d\tau}=A(\tau)z+G(\tau,z,\varepsilon,\beta), \tag{3.5}$$

$$G(\tau,z,\varepsilon,\beta)=(1+\beta)[f(u+z)+F(u+z,\varepsilon)] \\ -A(\tau)z-f(u).$$

由于 1 是(3.3)的一个单特征乘数, 推知 $\dot{u}$ 是(3.3)的周期为 ω 的解的一个基, 又有一个周期为 ω 的行向量 ψ,它是(3.3)的伴随系统的周期为 ω 的解的一个基. 此外, 可以假定$\int_0^\omega|\psi(t)|^2dt=1$. 现在, 我们用前面的理论确定(3.5)的周期为 ω 的解. 对于 $\mathscr{P}_\omega$ 内任意的 h, 设

$$\gamma(h)=\int_0^\omega\psi(t)h(t)dt.$$

根据第 2 节, 对于 $\mathscr{P}_\omega$ 内任意的 h, 我们知道方程

$$\frac{dz}{d\tau}=A(\tau)z+h(\tau)-\gamma(h)\psi'(\tau)$$

在 $\mathscr{P}_\omega$ 内有唯一的解 $\mathscr{M}h$, 使得$\int_0^\omega\dot{u}'(t)\mathscr{M}h(t)dt=0$, 而 $\mathscr{M}:\mathscr{P}_\omega\to\mathscr{P}_\omega$ 是一个连续线性算子. 设 $\mathscr{F}:\mathscr{P}_\omega\to\mathscr{P}_\omega$ 的定义是

$$\mathscr{F}z=\mathscr{M}G(\cdot,z,\varepsilon,\beta).$$

按照通常的方法, 可说明有 $\varepsilon_1>0$, $\beta_1>0$, $\delta_1>0$ 使得 $\mathscr{F}$ 是

$$\mathscr{P}_\omega(0)=\{z\in\mathscr{P}_\omega:\|z\|\leqslant\delta_1\}$$

上的一致压缩. 因此, $\mathscr{F}$ 有唯一的不动点 $z^*(\varepsilon, \beta)$, 它对 ε, β 连续, 又对 β 连续可微. 还有 $z^*(0,0)=0$. 这个不动点 $z^*(\varepsilon, \beta)$是关系式

$$\frac{dz}{d\tau}=A(\tau)z+G(\tau, z, \varepsilon, \beta)-B(\varepsilon, \beta)\psi'(\tau), \tag{3.6}$$

$$B(\varepsilon, \beta)=\gamma(G(\tau, z^*(\varepsilon, \beta), \varepsilon, \beta))$$

的一个解. 函数 $B(\varepsilon, \beta)$对 ε, β 连续, 又满足 $B(0, 0)=0$. 此外, 由于 $z^*(\varepsilon, \beta)$对于 β 连续可微, 推知 $B(\varepsilon, \beta)$对于 β 连续可微. 并且, 可以得出 $\varepsilon=0$, $\beta=0$ 时 $\partial B(\varepsilon, \beta)/\partial\beta=\int_0^\omega \psi(\tau)\dot{u}(\tau)d\tau$ 的结论. 这最后一个积分必不等于零, 否则方程

$$\frac{dz}{d\tau}=A(\tau)z+\dot{u}(\tau)$$

在 $\mathscr{P}_\omega$ 内将有一个解. 而这是不可能的, 因为这个方程总有解 $z(\tau)=\tau\dot{u}(\tau)$. 由于 $B(0,0)=0$ 与 $\partial B(0, 0)/\partial\beta\neq0$, 由隐函数定理推知存在一个 $\beta=\beta(\varepsilon)$, 使得 $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 时 $B(\varepsilon, \beta(\varepsilon))=0$. 于是, 函数 $z^*(\varepsilon, \beta(\varepsilon))$ 是 (3.1)的一个周期为 ω 的解, 而定理就被证明了.

Ⅷ.4. 对进一步学习的说明与建议

Poincaré 在他的关于天体力学的著名论文[2]中, 首先说明了确定含有小参数的微分方程的周期解的系统方法. 在 1940 年, Cesari[3]给出了确定线性周期系统特征指数的方法, 它与本章所说明的在精神上相通, 尽管细节有所不同. Cesari 的方法被 Hale[1]与 Gambill 和 Hale[1]引伸应用于含小参数的非线性微分方程的周期解. 对 Cesari[3]与[5]的基本方法作进一步修改, 就引导到本章中所说明的方法. 与这一发展同时, Friedrichs[1], Lewis[1]与 Bass[1, 2]研究出与上面的方法关系很紧密的方法.

习题 1.3 是 Reuter[1]提出的；习题 1.5 与 1.6 是 Hale[6]，习题 1.15 是 Hale[7]，习题 1.17 是 Bailey 与 Cesari[1]提出的。除开符号有改变以外，引理 2.3 应归于 Lewis[1]．第 2 节的性质(E)的较特殊的形式由 Hale[7]给出过．定理 2.3 被 Lewis 在[1]中陈述过．习题 2.7 与 2.8 是 Hale[2]的结果的特殊情形．习题 2.9 当对于解析系统来说时，应归于 Liapunov[1]．习题 2.10 归于 Bogoliubov 与 Sadovnikov[1]，而习题 2.11 与 2.12 则归于 Golomb[1]．

在 Lewis[2]的微分方程自联觉解的理论中，包含了对周期性以及性质(E)的有意义的引伸．关于非线性二阶方程的小扰动，请参阅 Loud[1]．

第 IX 章　解泛函方程的更替问题

为了引出本章所要进行的讨论，让我们用比较一般的提法来解释上一章的方法. 设 $\mathscr{P}_T$ 是 Banach 空间，其元素是周期为 T 的 n 维向量函数，范数是上确界；设 A 是 $n\times n$ 矩阵，它的列属于 $\mathscr{P}_T$；设 L 是对 $\mathscr{P}_T$ 中连续可微函数定义的线性算子，$(Lx)(t)=\dot{x}(t)-A(t)x(t)$；设 $N:\mathscr{P}_T\to\mathscr{P}_T$ 的定义是 $(Nx)(t)=\varepsilon f(t,x(t))$，这里的 f 是 x 的连续可微函数，对 t 的周期为 T. 在 $\mathscr{P}_T$ 中求微分方程

$$\dot{x}-A(t)x=\varepsilon f(t,x)$$

的解的问题于是等价于在 $\mathscr{P}_T$ 内求使 $Lx=Nx$ 的连续可微函数 x. 引理 Ⅷ.2.2 断言方程 $Lx=Nx$ 等价于方程组

$$\begin{aligned}&(a)\quad x=Px+\mathscr{K}(I-Q)Nx,\\&(b)\quad QNx=0,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 P, Q, $\mathscr{K}$ 如关系式(Ⅷ.2.5)与引理 Ⅷ.2.2 中所定义. 方程组(1)比原来的微分方程有明显的优越性. 事实上，对于小"N"与满足 $Px_0=x_0$ 的固定的 x_0，可以确定出(1a)的一个满足 $Px^*(x_0)=x_0$ 的解 $x^*(x_0)$. 于是，$Lx=Nx$ 的解的存在性等价于确定一个 x_0，使得 $QNx^*(x_0)=0$. 我们曾称 x_0 的方程为确定方程或分歧方程. 然而我们要说这些方程是 $Lx=Nx$ 的一个更替问题，这比较合理.

本章的目的是确定更大的一类方程，它们对 Banach 空间内的 x 而言等价于 $Lx=Nx$，然后在 N 不一定小的条件下叙述更替问题. 我们之所以取这种一般的处理方式，是因为它的思想可以用于常微分方程以外的场合；例如，积分方程，泛函微分方程与偏

微分方程．然而，我们专注于对常微分方程的应用．

IX.1. 等价方程

如果 X, Z 是 Banach 空间，B 是把 X 的一个子集映入 Z 的算子，我们令 $\mathscr{D}(B)$，$\mathscr{R}(B)$，$\mathscr{N}(B)$ 分别表示 B 的定义域，值域与零空间．如果 E 是定义在 Banach 空间 Z 上的一个射影算子，我们用 Z_E 来记 $\mathscr{R}(E)$，以后也将常用 Z_E 来记按此方式通过射影算子 E 得到的子空间．符号 I 将表示恒等算子．如果 $L:\mathscr{D}(L)\subset X\to Z$ 是一个线性算子，而 K 是把 $\mathscr{R}(L)$ 映到 $\mathscr{D}(L)$ 的有界线性算子，对于 $\mathscr{R}(L)$ 中的 z 有 $LKz=z$，则称 K 为 L 的有界右逆算子．

设 X, Z 是 Banach 空间；设 $N: X\to Z$ 是一个线性或非线性的算子；设 $L:\mathscr{D}(L)\subset X\to Z$ 是一个线性算子，它可能有非平凡的零空间，也可能在 Z 内有亏域．

引理 1.1. 假设 $\mathscr{N}(L)$ 与 $\mathscr{R}(L)$ 可由射影生成，$\mathscr{N}(L)=X_P$，$\mathscr{R}(L)=Z_{I-Q}$，又假设 L 有有界右逆算子 K，且 $PK=0$．则方程

$$Lx=Nx \tag{1.1}$$

等价于方程组

$$\begin{aligned} &(a)\quad x=Px+K(I-Q)Nx,\\ &(b)\quad QNx=0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

证明 显然，方程(1.1)等价于方程组

$$\begin{aligned} &(a)\quad (I-Q)(Lx-Nx)=0,\\ &(b)\quad Q(Lx-Nx)=0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

由于 $LX=(I-Q)Z$，又 Q 是一个射影，故 $QL=0$．于是(1.3b)等价于(1.2b)，而(1.3a)等价于 $Lx=(I-Q)Nx$．由于 $(I-Q)Nx$ 属于 L 的值域，而 K 是 L 的有界右逆算子，故这后一个方程等价于 $x=x_0+K(I-Q)Nx$，这里的 x_0 属于 $\mathscr{N}(L)$．但是，$PK=0$ 意味着 $x_0=Px$，引理证毕．

引理 1.1 中的条件 $PK=0$ 并不是什么限制．事实上，如果 M 是 L 的有界右逆算子，则 $K \xlongequal{\text{def}} (I-P)M$ 也是一个有界右逆算子，并且 $PK=0$.

按照这少许的初步说明，人们便可以叙述(1.1)的某些更替问题．比较具体地说，如果 N 在某个球内足够地小，以致对于固定的 $Px=x_0$，可把压缩原理用于 (1.2a)，那么由 (1.2a) 可以解出 $x^*(x_0)$，而 $QNx^*(x_0)=0$ 是(1.1)的一个更替问题.

换句话说，我们可以在 $\mathscr{N}(L)$ 中任意固定一个元素 x_0，解(1.2a)得 $x^*(x_0)$，然后试定出 x_0 使得(1.2b)得以满足．更替问题与 L 的零空间有相同的"维数"．在很多情况下，原方程 $Lx=Nx$ 是无穷维的，而更替问题却是有限维的．在下一节将确切地叙述这个结论，而现在我们要求出另一组与(1.1)等价的方程，它可以在 N 不小的情况下加以讨论．想法很简单．如果想对(1.2a)用压缩原理，则 $K(I-Q)$ 必需在某种意义下是小的．然而，如果 N 在全空间是大的，则应可选取射影算子 Q，使得只要考虑个数较少的 x 值便可使乘积 $K(I-Q)$ 小，现在把这个想法确切化.

附图 1 在使下述引理直观化方面是有用的.

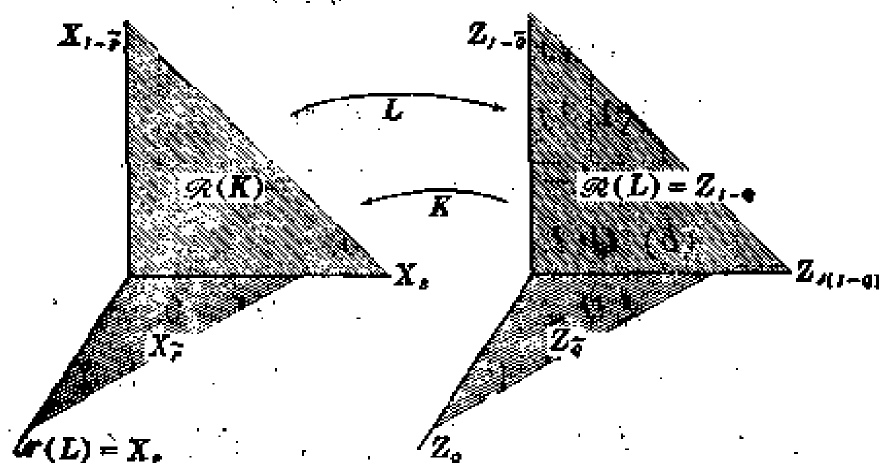


图 II.1.1

引理 1.2. 假设 P, Q, K 如引理 1.1 中所设，又设 S 是 X 上的

任意射影，它使得 $X_S \subset \mathscr{R}(K)$，$SP=0$. 则下列结论正确：

(i) $\widetilde{P}=P+S$ 是一个射影算子.

(ii) X_S 与 $X_{I-\widetilde{P}} \cap \mathscr{D}(L)$ 在K作用下在 Z_{I-Q} 内的原像引导出一个射影 $J: Z_{I-Q} \to Z_{I-Q}$. 如果 $X_S = KZ_{J(I-Q)}$，设 $I-\widetilde{Q}=(I-J)(I-Q)$. 则 $\widetilde{Q}: Z \to Z$ 是一个射影，又 $X_{I-\widetilde{P}} \cap \mathscr{D}(L) = KZ_{I-\widetilde{Q}}$.

(iii) 对于 $\mathscr{D}(L)$ 中任意 x，

$$x=K(I-\widetilde{Q})Lx+\widetilde{P}x. \tag{1.4}$$

(iv) $\widetilde{Q}L=L\widetilde{P}$.

证明 (i) 由于$\mathscr{R}(S) \subset \mathscr{R}(K)$ 与 $PK=0$，推知 $PS=0$. 经过直接计算便可证明 $\widetilde{P}=P+S$ 是一个射影.

(ii) 由于 $Kz_1=Kz_2$ 意味着 $K(z_1-z_2)=0$ 与 $0=LK(z_1-z_2)=z_1-z_2$，故K是把 Z_{I-Q} 映到 $X_{I-P} \cap \mathscr{D}(L)$ 的一对一映射. 如果 Z_1，Z_2分别是 X_S 与 $X_{I-\widetilde{P}} \cap \mathscr{D}(L)$ 在 K 作用下的原像，则 $Z_1 \cap Z_2=\{0\}$，$Z_{I-Q}=Z_1 \oplus Z_2$. 如果 $z_n \in Z_2$，当 $n \to \infty$ 时 $z_n \to z$，则由于K连续，当 $n \to \infty$ 时 $Kz_n \to Kz$. 此外，有 $x_n \in X_{I-\widetilde{P}} \cap \mathscr{D}(L)$与 $x \in \mathscr{D}(L)$，使得 $Kz_n=x_n$，$Kz=x$. 由于 $x_n \to x$，与 $X_{I-\widetilde{P}}$ 是闭的，故 $x \in X_{I-\widetilde{P}}$. 于是 $x \in X_{I-\widetilde{P}} \cap \mathscr{D}(L)$，并且 Z_2是闭集. 按同样的方式，或利用 X_S 是闭集与K连续的事实，可以看出 Z_1 是闭集. 于是，在 Z_{I-Q} 上引导出一个射影 J. 如果我们设$X_S=KZ_{J(I-Q)}$与 $I-\widetilde{Q}=(I-J)(I-Q)$，又利用$(I-Q)(I-J)=I-J$ 这个事实，显然可见 $I-\widetilde{Q}$ 是一个射影. 由于 $X_S=KZ_{J(I-Q)}$，显然也可知 $X_{I-\widetilde{P}} \cap \mathscr{D}(L)=KZ_{I-\widetilde{Q}}$.

(iii) 对于 $\mathscr{D}(L)$ 中任意 x 有 $x=KLx+Px$. 由于 $\widetilde{Q}$ 是一个射影算子，

$$x=K(I-\widetilde{Q})Lx+K\widetilde{Q}Lx+Px. \tag{1.5}$$

从性质(ii)知，由于 $X_{I-\widetilde{P}} \subset X_{I-S}$，故 $K(I-\widetilde{Q})Lx$ 属于 X_{I-S}. 此外，直接计算表明 $\widetilde{Q}(I-Q)=J(I-Q)$，因此 $K\widetilde{Q}Lx=K\widetilde{Q}(I-Q)Lx$

属于 X_s. 以 S 作用于 (1.5), 利用 $SP=0$ 的事实, 我们得到 $Sx=SK\tilde{Q}Lx=K\tilde{Q}Lx$. 由于 $\tilde{P}=P+S$, 这就证明了关系(iii).

(iv) 以 L 作用于(1.4), 又利用 K 是 L 的右逆这个事实, 我们有 $Lx=(I-Q)Lx+L\tilde{P}x$. 因此, 满足性质(iv).

这就证明了引理 1.2.

引理 1.3. 假设 X, Z 是 Banach 空间, $L:\mathscr{D}(L)\subset X\to Z$ 是一个线性算子, $\mathscr{R}(L)$, $N(L)$ 分别由射影 $I-Q$, P 所形成, L 有有界右逆 K, $PK=0$, 又 $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ 是在引理 1.2 中所定义的算子. 对于任意算子 $N:X\to Z$, 方程 $Lx-Nx=0$ 有解, 当且仅当

$$\begin{aligned}&(a)\quad x=\tilde{P}x+K(I-\tilde{Q})Nx,\\&(b)\quad \tilde{Q}(Lx-Nx)=0.\end{aligned}\tag{1.6}$$

证明 设 $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ 如引理 1.2 中所示, 则方程 $Lx-Nx=0$ 等价于方程组 $\tilde{Q}(Lx-Nx)=0$, $(I-\tilde{Q})(Lx-Nx)=0$. 如果 $(I-\tilde{Q})\times(Lx-Nx)=0$, 则关系(1.4)意味着 $K(I-\tilde{Q})Nx=K(I-\tilde{Q})Lx=(I-\tilde{P})x$, 因此(1.6a)被满足. 如果 $Lx-Nx=0$, 则(1.6b)自动满足. 反之, 如果满足(1.6a), 则 $L(I-\tilde{P})x=(I-\tilde{Q})Nx$. 由于满足引理 1.2 的关系(iv), 这意味着 $(I-\tilde{Q})(Lx-Nx)=0$. 如果也满足(1.6b), 则 $Lx-Nx=0$. 这证明了引理.

IX.2. 推广

如同在引理 1.3 中见到过的, 几何引理 1.3 使我们能够建立许多等价于方程(1.1)的方程组, 为了得到这些结果, 对线性算子 L 作过一些假设. 然而, 一旦得到了算子 $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ 之间的基本关系式, 就可能抽象地陈述涉及到的基本过程. 为此, 设 X, Z 是 Banach 空间; 设 $N:\mathscr{D}(N)\subset X\to Z$ 是一个线性或非线性的算子; 设 $L:\mathscr{D}(L)\subset X\to Z$ 是一个线性算子, 又令 $F=L-N$. 还要求 $Fx=0$ 的解属于 $\mathscr{D}(L)\cap\mathscr{D}(N)$. 作下列假定:

H_1: 有射影算子 $\widetilde{P}:X\to X$, $\widetilde{Q}:Z\to Z$, 使得 $\widetilde{Q}L=L\widetilde{P}$.

H_2: 有一个线性映射 $K:Z_{I-\widetilde{Q}}\to X_{I-\widetilde{P}}$, 使得

(i) 当 x 在 $\mathscr{D}(L)$ 内, $K(I-\widetilde{Q})Lx=(I-\widetilde{P})x$,

(ii) 当 x 在 $\mathscr{D}(N)$ 内, $LK(I-\widetilde{Q})Nx=(I-\widetilde{Q})Nx$.

H_3: 算子 $\Delta=\widetilde{P}+K(I-\widetilde{Q})N$ 的所有不动点属于 $\mathscr{D}(L)\cap\mathscr{D}(N)$.

对于满足引理 1.3 的假定的算子 L, N, 可证明有一大类算子 $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ 满足假定 H_1-H_3. 事实上, 假定 H_1 正是引理 1.2 的关系 (iv), 算子 $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ 依赖于 X 的颇为任意的子空间. 假定 H_2(ii) 相应于 L 有一个右逆. 假定 H_2(i) 是引理 1.2 的关系(1.4). 假定 H_3 为所作的特殊 $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ 与所考虑的有界右逆所自动满足. 如果 L, N 如上所述, 又 K, $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ 存在, 使满足 H_1-H_3, 则不一定能用引理 1.2 的作法求得 $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$. 事实上, 那种作法假设了 L 有一个有界右逆, $\mathscr{R}(L)$, $\mathscr{N}(L)$ 由射影所生成. 不能从 H_1-H_3 推出这些性质. 当然, 在应用中, 引理 1.2 是求 $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ 的颇为自然的途径.

引理 2.1. 如果满足假定 H_1-H_3, 则方程 $Fx=0$ 在 $\mathscr{D}(L)\cap\mathscr{D}(N)$ 有一个解, 当且仅当

$$\begin{aligned}&(a)\quad x=\Delta x\xrightarrow{\text{def}}\widetilde{P}x+K(I-\widetilde{Q})Nx,\\&(b)\quad \widetilde{Q}Fx=0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

证明 关系式 $Fx=0$ 意味着 $\widetilde{Q}Fx=0$, $(I-\widetilde{Q})Fx=0$. 因此, $(I-\widetilde{Q})Lx=(I-\widetilde{Q})Nx$ 与假定 H_2(i) 意味着

$$K(I-\widetilde{Q})Nx=K(I-\widetilde{Q})Lx=(I-\widetilde{P})x.$$

于是 $x=\Delta x$. 反之, 假设满足(2.1). 如果 $x=\Delta x$, 则 $(I-\widetilde{P})x=K(I-\widetilde{Q})Nx$. 假定 H_3 意味着 x 在 $\mathscr{D}(L)\cap\mathscr{D}(N)$ 内, 而 H_2(ii) 意味着

$$L(I-\widetilde{P})x=LK(I-\widetilde{Q})Nx=(I-\widetilde{Q})Nx.$$

但是, 这个事实与 H_1 意味着 $(I-\widetilde{Q})Fx=0$. 由假定 $\widetilde{Q}Fx=0$, 引理证毕.

IX.3. 更替问题

除对上节中的算子$\widetilde{P}, \widetilde{Q}, K, L, N$ 作出假定 H_1-H_3, 我们再假设 $\mathscr{D}(N)=X$ 与

H_4: 存在一个常数 μ 与一个连续的非降函数 $\alpha(\rho), 0\leqslant\rho<\infty$, 使得对$|x_1|, |x_2|<\rho$ 有

$$|K(I-\widetilde{Q})Nx_1-K(I-\widetilde{Q})Nx_2|\leqslant\alpha(\rho)|x_1-x_2|,$$
$$|K(I-\widetilde{Q})Nx_1|\leqslant\alpha(\rho)|x_1|+\mu.$$

对于任何正的常数 $c, d, c<d$, 令

$$\begin{aligned}&(a)\ V(c)=\{x\in X_{\widetilde{P}}:|x|\leqslant c\}.\\&(b)\ \mathscr{S}(\tilde{x}, c, d)=\{x\in X:\widetilde{P}x=\tilde{x}, \tilde{x}\in V(c), |x|\leqslant d\}\end{aligned}\tag{3.1}$$

这里 $\tilde{x}$ 是 $V(c)$ 的一个固定元素.

定理 3.1. 假设 $\mathscr{D}(N)=X, V(c)$, $\mathscr{S}(\tilde{x}, c, d)$, $c<d$ 由 (3.1) 定义. 设假定 H_1-H_4 被满足并有 $\alpha(d)<1, \alpha(d)d<d-c-\mu$. 则存在唯一的连续函数 $G:V(c)\to X$, $G\tilde{x}\in\mathscr{S}(\tilde{x}, c, d)$, 使得 $G\tilde{x}$ 满足方程

$$x=\Delta x\overset{\text{def}}{=}\widetilde{P}x+K(I-\widetilde{Q})Nx.\tag{3.2}$$

如果在 $V(c)$内有一个 $\tilde{x}$, 使得

$$\widetilde{Q}FG\tilde{x}=0,\tag{3.3}$$

则 $FG\tilde{x}=0$. 反之, 如果有一个 x 使得 $Fx=0$, $|x|\leqslant d$, $|\widetilde{P}x|\leqslant c$, 则 $x=G\widetilde{P}x$, 而$\tilde{x}=\widetilde{P}x$ 是(3.3)的一个解.

证明 对于任意的 $\tilde{x}\in V(c)$与$x\in X$, 令$H(x, \tilde{x})=\tilde{x}+K(I-\widetilde{Q})\times Nx$. 对于任意 $x\in\mathscr{S}(\tilde{x}, c, d)$, $\widetilde{P}H(x, \tilde{x})=\tilde{x}$,

$$|H(x, \tilde{x})|\leqslant c+\alpha(d)|x|+\mu\leqslant c+\alpha(d)d+\mu<d,$$

而且

$$|H(x_1, \tilde{x})-H(x_2, \tilde{x})|\leqslant\alpha(d)|x_1-x_2|.$$

因此, $H(\cdot, \tilde{x}):\mathscr{S}(\tilde{x}, c, d)\to\mathscr{S}(\tilde{x}, c, d)$ 是一个压缩且在 $\mathscr{S}(\tilde{x}, c, d)$

内有唯一不动点 $G\tilde{x}$. 显然，函数 G 连续，又由于 $\tilde{x}=\tilde{P}\tilde{x}$, G 满足(3.2). 如果 $\tilde{x}$ 满足(3.3), 引理 2.1 意味着 $FG\tilde{x}=0$.

反之, 如果 x 是 $Fx=0$ 的解, $\tilde{x}=\tilde{P}x$, $|x|\leqslant d$, $|\tilde{x}|\leqslant c$, 则引理 2.1 意味着 $x=\Delta x$ 与 $\tilde{Q}Fx=0$. 但在引理 2.1 第一部分的证明中指出了 Δ 有唯一不动点, $\tilde{P}x=\tilde{x}$. 因此, $Fx=0$ 的解 x 必定满足 $x=G\tilde{x}$, $\tilde{x}=\tilde{P}x$. 由于 x 还需满足 $\tilde{Q}Fx=0$, 推知 $\tilde{x}$ 满足(3.3). 这就证明了定理.

在定理 3.1 的意义下，在 $V(c)$ 中求(3.3)的解 $\tilde{x}$ 等价于求方程(1.1)的满足 $|x|\leqslant d$, $|\tilde{P}x|\leqslant c$ 的解. 因此, 我们把方程(3.3)作为方程(1.1)的一个更替问题.

IX. 4. 周期解的更替问题

在这一节里，我们联系常微分方程周期解的存在性来讨论更替问题的某些构成细节与较详尽的意义.

假设 $g:(-\infty,\infty)\times C^n\to C^n$ 连续，$g(t,u)$ 对 u 局部地满足 Lipschitz 条件，对于所有 $t\in(-\infty,\infty)$, $u\in C^n$ 有 $g(t,u)=g(t+2\pi,u)$, 问题在于确定方程

$$\dot{u}=g(t,u) \tag{4.1}$$

的周期为 2π 的解. 让我们用前面的记号来复述这个问题.

设 Y 是一个 Banach 空间，其元素是把$[0,2\pi]$映入 C^n 的连续函数，具有一致范数. 又设 $B:\mathscr{D}(B)\subset Y\to Y$ 是线性算子，定义域 $\mathscr{D}(B)=\{y\in Y:\dot{y}\in Y\}$, 对于 $y\in\mathscr{D}(B)$, 有 $By(t)=\dot{y}(t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. 设 $M:Y\to Y$ 是算子，对于 $y\in Y$, $(My)(t)=g(t,y(t))$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$; $\Gamma:Y\to C^n$ 是有界线性算子，对于 $y\in Y$, $\Gamma(y)=y(0)-y(2\pi)$. 这样，求(4.1)的一个周期为 2π 的解等价于解边值问题

$$By=My,\quad \Gamma y=0,\ y\in Y. \tag{4.2}$$

如果 $X=\mathscr{N}(\Gamma)$，而L,N 是 B,M 在X上的局限形式，则边界值问题(4.2)等价于求方程

$$Lx=Nx,\quad x\in X \tag{4.3}$$

的解.

设 $P:X\to X$ 是射影算子，其定义为

$$Px=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt; \tag{4.4}$$

即 Px 是Y中周期为 2π 的函数的平均值. 按此记号，$\mathscr{N}(L)=X_P=\{X$ 内所有常数函数$\}$，$\mathscr{R}(L)=X_{I-P}=\{$所有周期为 2π，平均值为零的函数$\}$. 因之第 1 节中的算子Q就是P. 如果 $z\in X_{I-P}$，则方程 $Lx(t)=\dot{x}(t)=z(t)$ 在X内有解，并且只有一个连续依赖于 z 且平均值等于零的解. 如果用 Kz 记此解，则 $K:X_{I-P}\to X_{I-P}$，$PK=0$，而K是L的一个有界右逆算子.

X 中任意 x 有 Fourier 级数

$$x\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ke^{ikt},\quad a_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}x(t)dt. \tag{4.5}$$

对于任意给定的整数 $m\geqslant 0$，令 $S_m:X\to X$ 的定义为

$$S_mx=\sum_{0<|k|\leqslant m}a_ke^{ikt}.$$

容易验证 S_m 是一个射影算子，而从引理1.2推知其中的 $\widetilde{P}_m=P+S_m$，$\widetilde{Q}_m=\widetilde{P}_m$. 方程(4.3)于是等价于方程组

$$\begin{aligned}&(a)\quad x=\widetilde{P}_mx+K(I-\widetilde{P}_m)x,\\&(b)\quad \widetilde{P}_m(Lx-Nx)=0.\end{aligned} \tag{4.6}$$

对于每个整数 $m\geqslant 0$ 此事实成立.

从 $\widetilde{P}_m$，K 的定义与(4.5)中 x 的形式知

$$K(I-\widetilde{P}_m)x(t)=\sum_{|k|>m}\frac{a_k}{ik}e^{ikt}.$$

回忆 Parseval 关系式$\int_0^{2\pi}|x(t)|^2dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2$. 由于

$$\sum_{|k|>m}\left|\frac{a_k}{k}\right|\leqslant\left(\sum_{|k|>m}|a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{|k|>m}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\int_0^{2\pi}|x(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{|k|>m}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{|k|>m}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}|x|$$

$$\overset{\text{def}}{=\!=}\gamma(m)|x|.$$

推知 $K(I-\widetilde{P}_m)x(t)$的 Fourier 级数绝对收敛，对所有 $x\in X$ 有

$$|K(I-\widetilde{P}_m)x|\leqslant\gamma(m)|x|.$$

请注意，由于级数$\sum_k k^{-2}<\infty$，故 $m\to\infty$ 时 $\gamma(m)\to0$.

由于假定 $g(t,u)$对 u 局部地满足 Lipschitz 条件，故存在一个常数 $\nu>0$ 与一个连续的非降函数$\beta(\rho)$, $0\leqslant\rho<\infty$, 使得$Nx(t)=g(t,x(t))$对于所有$|x_1|\leqslant\rho$, $|x_2|\leqslant\rho$ 满足

$$|Nx_1-Nx_2|\leqslant\beta(\rho)|x_1-x_2|,$$

$$|Nx_1|\leqslant\beta(\rho)|x_1|+\nu.$$

由此推知，对于任意常数 $d>0$ 与任意 m，以及对所有$|x_1|\leqslant d$ 与$|x_2|\leqslant d$ 有

$$|K(I-P_m)(Nx_1-Nx_2)|\leqslant\gamma(m)\beta(d)|x_1-x_2|,$$

$$|K(I-P_m)Nx_1|\leqslant\gamma(m)\beta(d)|x_1|+\gamma(m)\nu.$$

假设 $0<c<d$ 是任意常数，而m被选得如此大，以致

$$\gamma(m)\beta(d)<1,\quad \gamma(m)\beta(d)d+\gamma(m)\nu<d-c.$$

于是由(3.2)定义的算子Δ是(3.1)中的集合$\mathscr{S}(\bar{x},c,d)$到自身的压缩映射. 这意味着方程

$$x=\tilde{x}+K(I-\widetilde{P}_m)Nx \tag{4.7}$$

对每个 $\tilde{x}\in\{x\in X_{\widetilde{P}_m}:|x|\leqslant c\}$ 有解 $G\tilde{x}$. 于是 (4.1) 的一个更替问题是方程

$$\widetilde{P}_m'(L-N)G\tilde{x}=0. \tag{4.8}$$

总之，由此更替问题的存在可得下述结论. 如果(4.1)有周期为 2π 的解 u, 则函数 $v(t)=\dot{u}(t)-g(t;u(t))$ 的所有 Fourier 系数必然等于零. 令

$$u(t)=u_m(t)+u_m^*(t),$$

$$u_m(t)=\sum_{|k|\leqslant m}a_ke^{ikt},$$

$$u_m^*(t)=\sum_{|k|>m}a_ke^{ikt}.$$

从上面的议论推知，总存在一个整数 m, 使得能够取定 $\tilde{x}=u_m$, 并且这样来确定 $G\tilde{x}=u_m^*(u_m)$, 使 $v(t)$ 的 Fourier 级数只包含 $|k|\leqslant m$ 的调和项 e^{ikt}(这是(4.7) 的解的意义). 于是，更替问题涉及确定 $u_m(t)$, 使得 $v(t)$ 剩下的 Fourier 系数等于零.

关于用这种方法确定 (4.1) 的周期解，遗留下两个严重的问题. 首先，不能事先确定有限维问题的规模，除非很仔细地估计算子 $K(I-\widetilde{P}_m)$ 的范数. 此外，有限维问题 (4.8) 牵涉到一个函数 G, 它只是以隐式给出的，而试图断言实际存在一个 $\tilde{x}$ 是极端困难的.

事实上，不能指望直接解(4.7)，而要用某些近似方法. 让我们写 $G\tilde{x}=\tilde{x}+\tilde{y}$, 这里 $\tilde{y}$ 在 $(I-\widetilde{P}_m)X$ 中，由 $\tilde{y}=K(I-\widetilde{P}_m)NG\tilde{x}$ 给出. 不可能确定 $\tilde{y}$, 但是如果用压缩原理证明了 $G\tilde{x}$ 的存在性，则对于某些常数 δ_m, 已经得到了 $\tilde{y}$ 的一个先验估计式为

$$|\tilde{y}|\leqslant\delta_m. \tag{4.9}$$

如果能说明方程

$$\widetilde{P}_m(L-N)(\tilde{x}+\tilde{y})=0 \tag{4.10}$$

对于每个给定的有界(4.9)的 $\tilde{y}$ 有一个解 $\tilde{x}$，那么更替问题 (4.8) 将确实有一个解. 为了说明这一性质，首先自然要查看令 $\tilde{y}=0$ 所得到的近似方程；即

$$\widetilde{P}_m(L-N)\tilde{x}=0. \tag{4.11}$$

方程(4.11)是 $Lx=Nx$ 的第 m 次 Galerkin 近似. 确定 (4.11) 的显式解与说明(4.10)对每个满足(4.9)的 $\tilde{y}$ 有一个解，其方法与此书内容差距甚大. 有兴趣的读者可以参考关于这种方法的实际应用的文献.

IX.5. Perron-Lettenmeyer 定理

在这一节里，我们说明怎样用第 1 与第 3 节的方法来证明 Perron-Lettenmeyer 定理，这个定理是关于形如

$$t^{\sigma_j}\dot{x}_j=N_j(t)x, \quad j=1,2,\cdots,n \tag{5.1}$$

的线性微分方程组的解析解的个数，此地 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$N_j=(N_{j1},\cdots,N_{jn})$，$N_{jk}(t)$ 当 $|t|\leqslant\delta(\delta>0)$ 是解析的，每个 σ_j 是非负的.

定理 5.1. 如果 $\mu=n-\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\geqslant 0$，则(5.1) 至少有 μ 个当 $|t|\leqslant\delta$ 解析的线性无关解.

证明 设 $\mathscr{B}$ 是所有 $|t|\leqslant\delta$ 时解析的纯量函数的集合. 如果 b 在 $\mathscr{B}$ 中，则 $b(t)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m t^m$，我们又定义 $|b|=\sum_{m=0}^{\infty}|b_m|\delta^m$. $\mathscr{B}$ 是一个 Banach 空间，函数 $|\cdot|$ 是 $\mathscr{B}$ 上的范数. 对于任意非负整数 σ，设 $l_\sigma:\mathscr{B}\to\mathscr{B}$ 是线性算子，定义为

$$l_\sigma b(t)=t^\sigma db(t)/dt. \tag{5.2}$$

显然

$$\mathscr{N}(l_\sigma)=\{\mathscr{B}\text{ 中的常数函数}\},$$

$$\mathscr{R}(l_\sigma)=\{c\in\mathscr{B}: c=t^\sigma b, b\in\mathscr{B}\}.$$

如果在$\mathscr{B}$上定义射影算子 p, q_σ 为

$$pb=b_0,\ q_\sigma b=\sum_{m=0}^{\sigma-1}b_m t^m, \tag{5.3}$$

则 p, $1-q_\sigma$ 分别是到 $\mathscr{N}(l_\sigma)$, $\mathscr{R}(l_\sigma)$ 的射影。l_σ 的在 $\mathscr{R}(l_\sigma)$上使 $pk_\sigma=0$ 的右逆 k_σ 由

$$k_\sigma(1-q_\sigma)b(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_{m+\sigma}}{m+1}t^{m+1} \tag{5.4}$$

给出，而$|k_\sigma(1-q_\sigma)b|\leqslant\delta^{1-\sigma}|(1-q_\sigma)b|$. 这证明了 k_σ 连续.

设X是由$\mathscr{B}$的 n 重叉积所成的 Banach 空间，对于 $x=(x_1, \cdots, x_n)'$, $x_j\in\mathscr{B}$, $|x|_X=\max\limits_j|x_j|_{\mathscr{B}}$. 由于不会引起混淆，我们把 $|x|_X$ 写作$|x|$. 设 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 是(5.1)中的非负整数，令 $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$，定义算子 $L_\sigma, P, Q_\sigma, K_\sigma, N$ 为

$$\begin{aligned}
&L_\sigma x=(l_{\sigma_1}x_1,\cdots,l_{\sigma_n}x_n)',\\
&Px=(px_1,\cdots,px_n)',\\
&Q_\sigma x=(q_{\sigma_1}x_1,\cdots,q_{\sigma_n}x_n)',\\
&K_\sigma x=(k_{\sigma_1}x_1,\cdots,k_{\sigma_n}x_n)',\\
&Nx=(N_1x,\cdots,N_nx)',
\end{aligned} \tag{5.5}$$

这里 l_{σ_j} 由 (5.2)定义，p, q_σ 由(5.3)，k_{σ_j} 由(5.4)定义，N_jx 在(5.1)中，而右上角的小撇表示转置。方程(5.1)现在可以写作

$$L_\sigma x=Nx,\ x\in X, \tag{5.6}$$

而根据引理 1.1，它等价于线性方程组

$$\begin{aligned}
&x=Px+K_\sigma(I-Q_\sigma)Nx,\\
&Q_\sigma Nx=0,\ x\in X.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

如果线性算子 $K_\sigma(I-Q_\sigma)N$ 是一个压缩算子，则可以选定一个 n 维常向量 x_0，确定方程 $x=x_0+K_\sigma(I-Q_\sigma)Nx$ 的唯一解 $x^*=x^*(x_0)$，$Px^*=x_0$. 于是方程组(5.7)将有一个解，当且仅当 x_0 满足方程 $Q_\sigma Nx^*(x_0)=0$. 显然这个 $x^*(x_0)$ 对 x_0 是线性的. 于是，将有 n 个未知纯量（x_0 的分量）的 $\sum_{j=1}^{n}\sigma_j$ 个齐次线性方程，因之(5.7)将有 $n-\sum_{j=1}^{n}\sigma_j$ 个解，这就说明了定理陈述的 μ 可能出现，除非算子 $K_\sigma(I-Q_\sigma)N$ 可能不是压缩. 另一方面，有一个自然的利用引理 1.2 的方法迴避这个困难.

对于任意给定的非负整数 r，令 $\widetilde{P}=P_{r+1}$ 为 X 上的射影算子，它把 X 中 x 的每个分量映为由其幂级数展开式前 $r+1$ 项组成的 r 次多项式. 容易看出，引理 1.2 中的算子 $\widetilde{Q}$ 是 $Q_{r+\sigma}$，$r+\sigma=(r+\sigma_1,\cdots,r+\sigma_n)'$. 于是，由引理 1.3 推知(5.6)等价于方程组

$$
\begin{aligned}
&x=P_{r+1}x+K_\sigma(I-Q_{r+\sigma})Nx,\\
&Q_{r+\sigma}(L_\sigma-N)x=0.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

并且，从 K_σ 的定义直接推知有一个不依赖于 r 的 $\beta>0$，使得对于所有 $x\in X$，$|K_\sigma(I-Q_{r+\sigma})Nx|\leqslant\beta|x|/(r+1)$. 因此当 r 充分大时，算子 $K(I-Q_{r+\sigma})N$ 是压缩. 最后，取定一个分量是 r 次多项式的 n 维向量 $f(t)$，可以确定 $x=f+K_\sigma(I-Q_{r+\sigma})Nx$ 的唯一解 $x^*=x^*(f)$，它对 f 是线性的并且连续. 因此，方程(5.8)有解，当且仅当 f 满足 $Q_{r+\sigma}(L_\sigma-N)x^*(f)=0$. 这是 f 的多项式的 $n(r+1)$ 个系数的 $nr+\sum_{j=1}^{n}\sigma_j$ 个齐次线性方程. 它总有 $\mu=n-\sum_{j=1}^{n}\sigma_j$ 个解. 这就证明了定理.

如果(5.1)中所有 $\sigma_j=1$，称方程在 $t=0$ 有一个正则奇点. 在这种情况下，上述定理没说明任何东西.

IX.6. 对进一步学习的说明与建议

对于 $\widetilde{P}=P$, $\widetilde{Q}=Q$, (1.1)的N小而且有小的Lipschitz常数的情形，定理3.1在许多文献中或隐或显地出现过；特别地，可以参阅Cesari[5,6], Cronin[1], Bortle[1], Graves[1], Nirenberg[1], Vainberg与Tregonin[1], Antosiewicz[1]. 然而，Cesari[5,6]注入了一种重要的新思想，他观察到对某类方程(1.1)，甚至当非线性N不小的时候，也总可以伴随以有限维更替问题. 在第1节中给出的$\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$作法是由Bancroft, Hale与Sweet[1]提出，并且是Cesari[6]所启发的. 第2节的抽象提法曾被Locker[1]沿着第4节的线索独立地发现过.

Cesari曾用第4节的方法在[5]中得到了

$$\ddot{x}+x^3=\sin t$$

的周期是2π的解的存在性与界，用到第二Galerkin近似$x=a\sin t+b\sin 3t$，在[6]中用第一Galerkin近似证明了边界值问题

$$\ddot{x}+x+\alpha x^3=\beta t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$x(0)=0,\quad x(1)+\dot{x}(1)=0$$

有一个解. Borges[1]应用同一过程，得到了非线性(周期的或自治的)二阶微分方程周期解的存在性与界;其中只用了第一Galerkin程序. Knobloch[1,2]还用此法研究二阶方程周期解的存在性. Urabe[2]的文章对多点边值问题讨论了相似的程序. Williams[1]发现了第4节与Leray-Schauder度之间在更替问题是有限维的时候的有趣联系.

当N足够小，以致$K(I-Q)N$是基本空间X的某个子集上的一个压缩算子的时候，定理3.1可应用到双曲型偏微分方程；请见Cesari[7], Hale[9], Rabinowitz[1], Hall[1]. Cesari[8]还对椭圆型偏微分方程得到了结果. 对于泛函微分方程的应用，请看

Perelló[1,2], 对于积分方程的应用, 请看 Vainberg 与 Tregenin [1].

第 5 节中证明 Perron-Lettenmeyer 定理的想法是 Sibuya 写信告诉作者的. 这个想法在 Harris, Sibuya 与 Weinberg[1]中得到加强. McGarvey [1] 这篇文章与本章的方法不是没有关系的, 其中讨论了周期系数线性方程的渐近解.

第 X 章　Liapunov 直接法

在前面各章中，我们反复断言过微分方程的某些解或解的集合的稳定性．在大多数情况下，这些结果的证明基于应用常数变易公式，因之，分析就限制在所讨论的解与集合的小邻域内．Liapunov 在他的著名的论文中对于决定微分方程的平衡点的稳定性或不稳定性，给出了某些非常简单的几何定理(一般叫作Liapunov 直接法)．它的想法是能量概念的推广，它的威力与效能在于通过研究微分方程本身而不需要求微分方程的解就能作出决定．Liapunov 的这些基本想法在许多专门研究这个题材的参考书中得到了广泛的发挥．本章的目的是介绍这个领域的若干基本想法与问题．

X.1. 自治系统稳定与不稳定的充分条件

设 $\Omega\subset R^n$ 是 R^n 内的开集，0 在 Ω 内．如果 $x\in\Omega$ 的纯量函数 $V(x)$ 在 Ω 上连续并且对 $x\in\Omega$ 有 $V(x)\geqslant 0$，则 $V(x)$ 在 Ω 上半正定．如果纯量函数 $V(x)$ 在 Ω 上半正定，$V(0)=0$，$x\neq 0$ 时 $V(x)>0$，则 $V(x)$ 在 Ω 上正定．如果 $-V(x)$ 在 Ω 上半正定(正定)，则纯量函数 $V(x)$ 在 Ω 上半负定（负定）．

函数 $V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ 在 R^2 上正定，$V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-x_2^3$ 在围绕 x_1 轴的充分小的带上正定，$V(x_1,x_2)=x_2^2+x_1^2/(1+x_1^4)$ 在 R^2 上正定．在每种情况下，存在 $c_0>0$ 使得对于每个非负常数 $c\leqslant c_0$，$\{(x_1,x_2):V(x_1,x_2)=c\}$ 是一条闭曲线．在 $(x_1,x_2)=(0,0)$ 附近，这些函数的每一个有描绘在图 1.1 中的那种定性性质．在 R^n 中，任意正定函数也有某些相同的定性性质，但是对于 V 的水平线

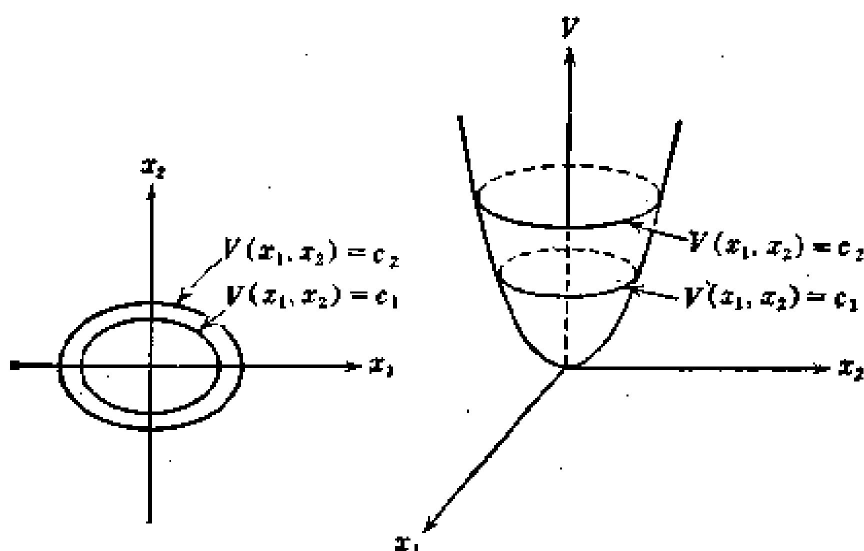


图 I.1.1

作精确描述的问题，至今还没有解决。然而，下述引理成立。

引理 1.1. 如果 V 是 Ω 上的正定函数，则存在 $x=0$ 的邻域 U 和常数 $c_0>0$，使得只要 $0\leqslant c\leqslant c_0$，从原点到 ∂U 的任何连续曲线必定与集合 $\{x:V(x)=c\}$ 相交。

证明 设 U 是 0 的有界开邻域，0 在 U 内，$\overline{U}\subset\Omega$。如果

$$l=\min_{x\in\partial U}V(x),$$

则 $l>0$。由于 $V(0)=0$，对于 ∂U 内的 x 有 $V(x)\geqslant l$，又 V 是连续函数，推知 $V(x)$ 沿着任何从 0 到 ∂U 的连续曲线必取到 0 与 l 之间的所有值。

引理 1.2. 如果 $V(x)=V_p(x)+W(x)$，这里当 $|x|\to 0$ 时 $W(x)=o(|x|^p)$，并且是连续函数，而 V_p 是正定的 p 次齐次多项式，则 $V(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内是正定的。

证明 如果 $\min\limits_{|x|=1}V_p(x)=k$，则 $k>0$。因此对 $x\neq 0$ 有

$$V_p(x)=|x|^pV(x/|x|)\geqslant k|x|^p.$$

对于任意 $e>0$，有 $\delta(e)>0$ 使得 $|x|<\delta(e)$ 时 $|W(x)|<e|x|^p$。如果 $e=k/2$，则如果 $0<|x|<\delta(k/2)$

$$V(x) \geqslant V_p(x) - |W(x)| \geqslant k|x|^p - \left(\frac{k}{2}\right)|x|^p = \left(\frac{k}{2}\right)|x|^p.$$

这就证明了引理.

引理 1.3. 假设 $V_p(x)$ 是 p 次齐次多项式. 如果 p 是奇数，则 V_p 不可能是定号函数.

证明 如果 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 且 $x_1 \neq 0$, 令 $x = x_1 u$. 则 $V_p(x) = x_1^p V_p(u)$. 对于使 $V_p(u) \neq 0$(比方说是正的) 的 u 的给定值，函数 $V_p(x)$ 与 x_1^p 同号. 如果 p 是奇数，这意味着 $V_p(x)$ 在 $x=0$ 的每个邻域里必改变符号.

确定任意 p 次齐次多项式的正定性的一般判别法尚未知道，但是对于 $p=2$, 我们有

引理 1.4. (Sylvester). 二次型 $x'Ax = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j (A' = A)$ 是正定的，当且仅当

$$\det(a_{ij}, i, j=1, 2, , \cdots, s) > 0, \quad s=1, 2, \cdots, n.$$

可以在 Bellman[2]中找到这个引理的证明.

考虑微分方程

$$\dot{x} = f(x). \tag{1.1}$$

这里 $f: R^n \to R^n$ 连续并且满足足够的光滑性条件，以保证通过任意点(1.1)存在解，解是唯一的并且连续地依赖于初始数据.

对于在 R^n 的开集 Ω 上定义的任意纯量函数 V, 假定它连同 $\partial V/\partial x$ 都是连续的，我们定义 $\dot{V} = \dot{V}_{(1.1)}$ 为

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x). \tag{1.2}$$

如果 $x(t)$ 是(1.1)的解，则 $dV(x(t))/dt = \dot{V}(x(t))$; 即 $\dot{V}$ 是 V 沿着(1.1)的解的导数. 请注意，$\dot{V}$ 可以直接从 $f(x)$ 来计算，因此不涉及积分.

对于在 R^n 的开集 Ω 上定义的纯量函数 V，如果 $\dot{V}$ 的定义是

$$\dot{V}(\xi)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(x(h,\xi))-V(\xi)]$$

这里 $x(h,\xi)$ 是(1.1)的在 $h=0$ 取初始值 ξ 的解，则当 V 在 Ω 上仅仅连续时，下面的定理依旧正确．如果 V 是局部 Lipschitz 连续的，则可以证明 $\dot{V}$ 的上述定义等价于

$$\dot{V}(\xi)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(\xi+hf(\xi))-V(\xi)]$$

在应用中有时要考虑并非在所有点 x 都有连续的一阶偏导数的函数 $V(x)$．另一方面，函数 $V(x)$ 通常是逐段光滑的，其导数的不连续集在基本空间 R^n 的低维曲面上．

由于下面各条定理的证明用不上 V 的可微性，定理的叙述也不用这个假设．然而在应用的大多数场合，$\dot{V}$ 将由(1.2)给出．

定理 1.1. 如果在 Ω 上有连续的正定函数 $V(x)$，$\dot{V}\leqslant 0$，则(1.1)的解 $x=0$ 是稳定的．此外，如果在 Ω 上 $\dot{V}$ 是负定的，则解 $x=0$ 是渐近稳定的．

证明 设 $B(r)$ 是 R^n 内中心在原点半径等于 r 的球．存在 $r>0$ 使得 $B(r)\subset\Omega$．对于 $0<\varepsilon<r$，若 $k=\min\limits_{|x|=\varepsilon}V(x)$，则 $k>0$ 假设 $0<\delta\leqslant\varepsilon$ 使得当 $|x|\leqslant\delta$ 时 $V(x)<k$．由于 $V(0)=0$ 且 V 连续，这样的 δ 总是存在的．如果 x_0 在 $B(\delta)$ 内，则由于 $\dot{V}\leqslant 0$ 意味着 $t\geqslant 0$ 时 $V(x(t))\leqslant V(x_0)$，(1.1)的取 $x(0)=x_0$ 的解 $x(t)$ 当 $t\geqslant 0$ 时在 $B(\varepsilon)$ 内．这证明了 $x=0$ 的稳定性．

由于 $x=0$ 稳定，存在 $b_0>0$，$H>0$，使得只要 $|x_0|<b_0$，对于 $t\geqslant 0$ 解 $x(t)$ 存在而且满足 $|x(t)|<H$．此外，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得 $|x_0|<\delta(\varepsilon)$ 时对 $t\geqslant 0$ 有 $|x(t)|<\varepsilon$．为了证明渐近稳定性，必须说明存在 $T>0$，使得 $|x_0|<b_0$ 时对 $t\geqslant T$ 有 $|x(t)|<\delta(\varepsilon)$．假设有 x_0，$|x_0|<b_0$，但 $t\geqslant 0$ 时 $|x(t)|\geqslant\delta(\varepsilon)$．如

果 $\gamma>0$ 使得 $\delta(e)\leqslant x<H, t\geqslant0$ 时 $\dot{V}(x(t))\leqslant-\gamma$，则

$$V(x(t))\leqslant V(x_0)-\gamma t.$$

如果 $\beta>0$，k 满足 $\delta(e)\leqslant x<H$ 时 $0<\beta\leqslant V(x)\leqslant k$，取 $T=(k-\beta)/\gamma$. 对于 $t\geqslant T, V(x(t))<\beta$. 于是，必定存在 t_0，$0\leqslant t_0\leqslant T$，使得 $|x(t_0)|<\delta(e)$. 稳定性意味着 $t\geqslant t_0$ 时 $|x(t)|<e$，特别当 $t\geqslant T$ 时此不等式成立. 定理证毕.

定理 1.2. 假设 $x=0$ 是(1.1)的一个平衡点，包含在开集 U 的闭包内，又设 Ω 是 $x=0$ 的邻域. 假设 V 是 Ω 上的纯量函数，满足:

(i) 在 $U\cap\Omega\backslash\{0\}$ 上 V 与 $\dot{V}$ 是正的.

(ii) 在 U 的边界上位于 Ω 内部的部分上 $V=0$.

则(1.1)的解 $x=0$ 是不稳定的. 比较明确地说，如果 Ω_0 是 $x=0$ 的任意满足 $\overline{\Omega}_0\subset\Omega$ 的有界邻域，则初始值在 $(U\cap\Omega_0)\backslash\{0\}$ 的任意解在有限时间内离开 Ω_0.

证明 设 $r>0$ 使得 $B(r)\subset\Omega$. 对于任意 $0<s\leqslant r$，有 $x_0\neq0$ 在 $U\cap B(s)$ 内，于是 $V(x_0)>0$. 由于在 $U\cap\Omega$ 内 $\dot{V}\geqslant0$，推知(1.1)的满足 $x(0)=x_0$ 的解当 $t\geqslant0$ 时满足 $V(x(t))\geqslant V(x_0)>0$. 如果 $\alpha=\min\{\dot{V}(x):x$ 在 $U\cap\Omega$ 内且 $V(x)\geqslant V(x_0)\}$，则 $\alpha>0$，而且对于使 $x(t)$ 仍旧在 $U\cap\Omega$ 内的所有 t 有

$$V(x(t))=V(x_0)+\int_0^t\dot{V}(x(t))dt\geqslant V(x_0)+\alpha t.$$

如果 Ω_0 是 $x=0$ 的包含在 Ω 内的任意有界邻域，由于 $V(x)$ 在 $U\cap\Omega_0$ 上有界，上述不等式意味着 $x(t)$ 必到达 $\partial\Omega_0$. 定理证毕.

定理 1.1 与 1.2 指出了不用明显地解方程而确定自治方程的平衡点稳定或不稳定的方法. 另一方面，没有作函数 V 的一般方法，研究者必须最充分地利用独创性. 对于线性系统(1.1)，下述引理有用. 在这个引理中，$Re\ \lambda(A)$ 记矩阵 A 的特征值的实部.

引理 1.5. 假设 A 是一个 $n\times n$ 矩阵. 矩阵方程

$$A'B+BA=-C \tag{1.3}$$

对于每个正定矩阵 C 有一个正定解 B, 当且仅当 $Re\ \lambda(A)<0$.

证明 考虑线性微分方程

$$\dot{x}=Ax \tag{1.4}$$

与纯量函数 $V(x)=x'Bx$, 这里 B 是对称矩阵.

$$\dot{V}_{(1.4)}(x)=x'[A'B+BA]x. \tag{1.5}$$

如果存在正定矩阵 B 使得满足 (1.3), 而 C 是正定的, 则定理 1.1 意味着(1.4)的所有解当 $t\to\infty$时趋于零. 自然, 这意味着 $Re\lambda(A)<0$.

反之, 如果 $Re\ \lambda(A)<0$ 而 C 是正定矩阵, 定义

$$B=\int_0^\infty e^{A't}Ce^{At}dt. \tag{1.6}$$

由于存在正的常数 K、α, 使得 $t\geqslant 0$ 时 $|e^{At}|\leqslant Ke^{-\alpha t}$, 故矩阵 B 是意义明确的. 此外, B 显然是正定的. 又

$$A'B+BA=\int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{A't}Ce^{At})dt=-C.$$

这就证明了引理.

从引理 1.5 的证明, 显然我们已经对线性系统(1.4)证明了下述渐近稳定性的逆定理.

引理 1.6. 如果系统(1.4) 是渐近稳定的, 则存在这样的正定二次型, 它沿着(1.4)的解的导数是负定的.

现在, 让我们把引理 1.5 用到方程

$$\dot{x}=Ax+f(x), \tag{1.7}$$

这里 f 在 R^n 内有连续的一阶导数, $f(0)=0$, $\partial f(0)/\partial x=0$.

如果 $Re\ \lambda(A)<0$, 则引理 1.5 意味着有正定矩阵 B, 使得 $A'B+BA=-I$. 令 $V(x)=x'Bx$. 则 $\dot{V}=\dot{V}_{(1.7)}$ 被给定为

$$\dot{V}=-x'x+2x'Bf(x).$$

引理 1.2 意味着$-\dot{V}$ 在 $x=0$ 的邻域内正定，而定理 1.1 意味着(1.7)的解 $x=0$ 是渐近稳定的. 这与第Ⅲ章中用常数变易公式得到的结果相同.

如果 $Re\,\lambda(A)\neq 0$ 且有若干特征值实部是正的，则不损一般性，我们可以假定 $A=\text{diag}(A_-,A_+)$，这里 $Re\,\lambda(A_-)<0, Re\lambda(A_+)>0$，令 B_1 为 $A'_-B_1+B_1A_-=-I$ 的正定解，B_2 为 $(-A'_+)B_2+B_2(-A'_+)=-I$ 的正定解，引理 1.5 保证了这些解的存在性. 如果 $x=(u,v)$，这里 u,v 分别与 B_1,B_2 维数相同，令 $V(x)=-u'B_1u+v'B_2v$. 则当 $|x|\to 0$ 时 $\dot{V}_{(1.7)}(x)=x'x+o(|x|^2)$. 引理 1.2 意味着在 $x=0$ 的邻域里 $\dot{V}(x)$ 是正定的. 另一方面，V 在其上正定的区域 U 显然满足定理 1.2 的条件. 于是，如果 A 有特征值是正实部的，则(1.7) 的解 $x=0$ 是不稳定的. 这个结果在第Ⅲ章中也用常数变易公式得到过.

上述结果容易推广. 为了简化表达法，我们说纯量函数 V 是 R^n 内的开集 G 上的 Liapunov 函数，如果 V 在 G 的闭包 $\bar{G}$ 上连续，对于 G 内的 x，$\dot{V}(x)=[\partial V(x)/\partial x]f(x)\leqslant 0$. 令

$$S=\{x\in\bar{G}:\dot{V}(x)=0\},$$

又设 M 是(1.1)在 S 内的最大不变集.

定理 1.3. 如果 V 是 G 上的 Liapunov 函数，而 $\gamma^+(x_0)$ 是(1.1)的落在 G 内的有界轨道，则 γ^+ 的 ω 极限集属于 M；即当 $t\to\infty$ 时 $x(t,x_0)\to M$.

证明 由于 $\gamma^+(x_0)$ 是有界的，当 $t\geqslant 0$ 时 $V(x(t,x_0))$ 有下界，而 $\dot{V}(x(t,x_0))\leqslant 0$ 意味着 $V(x(t,x_0))$ 是非增的. 因此当 $t\to\infty$ 时 $V(x(t,x_0))$ 趋于常数 c. 又 V 的连续性意味着对于 $\omega(\gamma^+)$ 内的任意 y 有 $V(y)=c$. 由于 $\omega(\gamma^+)$ 是不变集，对于所有 t 与 $\omega(\gamma^+)$ 中的 y 有 $V(x(t,y))=c$. 因此 $\omega(\gamma^+)$ 属于 S. 这就证明了定理.

推论 1.1. 如果 V 是 $G=\{x\in R^n: V(x)<\rho\}$ 上的 Liapunov 函数，又 G 是有界的，则当 $t\to\infty$ 时(1.1)的初始值在 G 内的每个解趋于 M.

推论 1.2. 如果 $|x|\to\infty$ 时 $V(x)\to\infty$，在 R^n 上 $\dot{V}\leqslant 0$，则(1.1)的每个解有界，并趋于(1.1) 的在 $\dot{V}=0$ 的集合内的最大不变集 M. 特别地，如果 $M=\{0\}$，则解 $x=0$ 是整体渐近稳定的.

证明 对于任意常数 ρ，V 是有界集合 $G=\{x: V(x)<\rho\}$ 上的 Liapunov 函数. 并且对于 R^n 内的任意 x_0，存在 ρ 使得 x_0 属于 G. 于是由推论 1.1 得到结果.

请注意在 $G\setminus\{0\}$ 上 $\dot{V}<0$ 意味着 $M=\{0\}$，从定理 1.3 可得定理 1.1 中的渐近稳定性结论.

定理 1.4. 假设 $x=0$ 是 (1.1) 的包含在开集 U 的闭包内的平衡点，令 Ω 为 $x=0$ 的一个邻域. 假设

(i) V 是 $G=U\cap\Omega$ 上的 Liapunov 函数，

(ii) $M\cap G$ 或是空集或是零点，

(iii) 当 $x\neq 0$ 时在 G 上 $V(x)<\eta$，

(iv) $V(0)=\eta$，又 x 在 G 的边界在 Ω 内的那部分上时，$V(x)=\eta$.

则 $x=0$ 不稳定. 比较明确地说，如果 Ω_0 是原点的有界邻域，$\overline{\Omega}_0$ 包含在 Ω 内，则初始值在 $(U\cap\Omega_0)\setminus\{0\}$ 的任意解在有限时间离开 Ω_0.

证明 如果 x_0 在 $(U\cap\Omega_0)\setminus\{0\}$ 内，则 $V(x_0)<\eta$. 并且，$\dot{V}\leqslant 0$ 意味着对所有 $t\geqslant 0$ 有 $V(x(t,x_0))\leqslant V(x_0)<\eta$. 如果 $x(t,x_0)$ 不离开 Ω_0，则 $\omega(\gamma^+(x_0))$ 不是空集，而且在 $\overline{\Omega}_0$ 内. 如同前面所证明的，$\omega(\gamma^+(x_0))\subset M$. 由于 $\omega(\gamma^+(x_0))$ 不是空集，这意味着 $\omega(\gamma^+(x_0))=\{0\}$，并且属于 $V(x)=\eta$ 的集合. 这与 $V(x(t,x_0))\leqslant V(x_0)<\eta$ 的事实矛盾，于是证明了定理.

例 1.1 考虑 van der Pol 方程

$$\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+x=0, \tag{1.8}$$

和与它等价的 Lienard 形方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y-\varepsilon\left(\frac{e^3}{3}-x\right),\\ \dot{y}&=-x.\end{aligned} \tag{1.9}$$

在第1章中，证明了对于每个 $\varepsilon>0$ 这个方程有唯一渐近稳定极限环. 极难找到这个极限环在 (x, y) 平面内的确切位置. 但是上面的理论使我们能在(0, 0)附近确定一个区域，极限环不可能落在其中. 这个区域可以通过在(1.8) 中令 $-t$ 代替 t 确定解 $x=0$ 的稳定性区域而求得. 这与取 $\varepsilon<0$ 有相同的效果.

因此，假设 $\varepsilon<0$，令 $V(x, y)$为(1.9)的总能量；即 $V(x,y)=(x^2+y^2)/2$. 则

$$\dot{V}(x,y)=-\varepsilon x^2\left(\frac{x^2}{3}-1\right),$$

且若 $x^2<3$ 则 $\dot{V}(x,y)\leqslant 0$. 考虑区域 $G=\{(x,y):V(x,y)<3/2\}$. 显然 G 有界，而 V 是 G 上的 Liapunov 函数. 并且，$S=\{(x,y):\dot{V}=0\}=\{(0, y):y^2<3\}$. 又从(1.9)，$M=\{(0,0)\}$，而推论 1.1 意味着从圆 $x^2+y^2<3$ 出发的每个解当 $t\to\infty$ 时趋于零点. 最后，当 $\varepsilon>0$ 时，(1.8)的极限环必在此圆外部.

例 1.2 考虑方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+h(x)=0. \tag{1.10}$$

这里 $x\neq 0$ 时 $xh(x)>0$，$x\neq 0$ 时 $f(x)>0$，而当 $|x|\to\infty$时 $H(x)=\int_0^x h(s)\,ds\to\infty$. 方程(1.10)等价于系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-h(x)-f(x)y.\end{aligned} \tag{1.11}$$

设$V(x, y)$是这个系统的总能量；即$V(x,y)=y^2/2+H(x)$. 则 $\dot{V}(x,$

$y)=-f(x)y^2\leqslant 0$. 对于任意 ρ，函数 V 是有界集合 $G=\{(x,y): V(x,y)<\rho\}$ 上的 Liapunov 函数. 此外，$\dot{V}=0$ 的集合包含在 x 轴与 y 轴的并集内. 根据(1.11)，这意味着 $M=\{(0,0)\}$，而推论 1.2 意味着 $x=0$ 是整体渐近稳定的.

习题 1.1. 利用定理 1.1 与 1.2 证明引理 V.1.2 与V.1.4.

习题 1.2. 考虑二阶系统

$$\dot{x}=y-xf(x,y),$$
$$\dot{y}=-x-yf(x,y).$$

当 f 有固定符号时，讨论这个系统的稳定性质.

习题 1.3. 考虑方程

$$\ddot{x}+a\dot{x}+2bx+3x^2=0,\quad a>0, b>0.$$

确定零解的最大渐近稳定区域，这个区域可通过用系统的总能量作为 Liapunov 函数求得.

习题 1.4. 考虑系统

$$\dot{x}=y,$$
$$\dot{y}=z-ay,$$
$$\dot{z}=-cx-F(y),$$

这里 $F(0)=0$，$a>0$，$c>0$，$y\neq 0$ 时 $aF(y)/y>c$，$|y|\to\infty$ 时 $\int_0^y[F(\xi)-c\xi/a]d\xi\to\infty$. 如果 $F(y)=ky$，这里 $k>c/a$，验证线性系统特征根的实部是负的. 证明，甚至当 F 是非线性函数时，原点是渐近稳定的.

习题 1.5. 假设存在正定矩阵 Q，使得对于所有 $x\neq 0$，$J'(x)Q+QJ(x)$ 是负定的，这里的 $J(x)$ 是 $f(x)$ 的 Jacobi 矩阵. 证明 $\dot{x}=f(x)(f(0)=0)$ 的解 $x=0$ 是整体渐近稳定的. 提示：证明 $f(x)=\int_0^1 J(sx)xds$ 且利用之.

习题 1.6. 假定有定义在全 (x,y) 平面内的函数 $V=y^2e^{-x}$，

并且相关到某个微分方程有 $\dot{V}=-y^2V$. 关于原微分方程的解，你能得到什么结论？如果不能，麻烦在哪里？

习题 1.7. 假设 $h(x,y)$是一个正定函数，使得对于任意常数 c, $0<c<\infty$, $h(x,y)=c$ 所定义的曲线是 Jordan 曲线，当 $x^2+y^2\to\infty$ 时 $h(x,y)\to\infty$. 对于$(-\infty,\infty)$内所有的 e 值，讨论方程

$$\dot{x}=ex+y-xh(x,y),$$
$$\dot{y}=ey-x-yh(x,y)$$

的解在相平面内的性态.

习题 1.8. 考虑 n 维系统

$$\dot{x}=f(x)+g(t),$$

这里对所有 x 有 $x'f(x)\leqslant-k|x|^2$, $k>0$, 而对于所有 t 有 $|g(t)|\leqslant M$. 找一个半径充分大的球，使得所有轨道进入它. 证明，如果 g 是周期为T的函数，则此方程有周期为T的解. 此外，如果对所有 $x\neq y$, $(x-y)'[f(x)-f(y)]<0$, 证明存在唯一的周期为T的解. 提示：利用 Brouwer 不动点定理.

习题 1.9. 假设 $g(t)$ 是殆周期函数，关于 f、g 其它与习题 1.8 中相同. 方程

$$\dot{x}=f(x)+g(t)$$

是否有殆周期解？

习题 1.10. 证明，如果 (1.7) 的 A 有一个特征值是正实部的，尽管有若干特征值实部为零，(1.7)的零解是不稳定的.

X. 2. 含有隧道二极管的迴路

在这一节里，我们举一例子，它说明前面的许多概念，考虑图 2.1 所示的回路. 图中的方盒表示一个隧道二极管，它的特征函数是 $f(v)$，它把电流表示成电压降 v 的函数. 由 Kirchoff 定律推知电流 i 与电压 v 之间的关系由

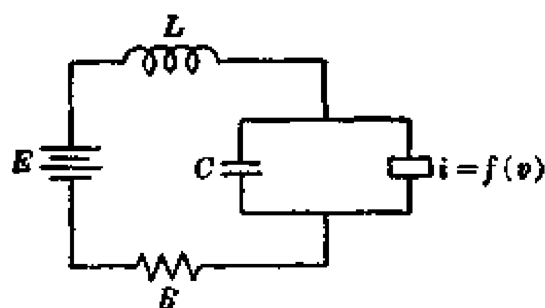


图 I.2.1

$$
\begin{aligned}
L\frac{di}{dt} &= E-Ri-v \stackrel{\text{def}}{=\!=} I(i,v),\\
-C\frac{dv}{dt} &= f(v)-i \stackrel{\text{def}}{=\!=} V(i,v)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

给出，这里 E,R,C,L 是正的常数，对于所有 v 有 $vf(v)\geqslant 0$.

引理 2.1. 如果有 $A>0$，使得 $|x|>A$ 时 $xf(x)>E^2/R$，则(2.1)的每个解有界．事实上，每个解最后总在一个由圆所界的区域里．

证明 如果 $W(i,v)=(Li^2+Cv^2)/2$，则 W 沿着(2.1)的解的导数是

$$\dot{W}=-\left[Ri\left(i-\frac{E}{R}\right)+vf(v)\right].$$

令 $W_0=[L(E/R)^2+CA^2]/2$．如果 $W(i,v)>W_0$，则要末 $|i|>E/R$，要末 $|v|>A$．如果 $|i|>E/R$，则 $\dot{W}<0$，而如果 $|i|\leqslant E/R$，$|v|>A$，则

$$\dot{W}<-\left[Ri^2-Ei+\frac{E^2}{R}\right]=-\left[Ri^2-E\left(i-\frac{E}{R}\right)\right]\leqslant -Ri^2\leqslant 0.$$

当 $i=0$，$|v|>A$，我们也有 $\dot{W}<0$．因此，在区域 $W(i,v)>W_0$ 内 $\dot{W}<0$．由于区域 $W<\rho$ 对任意 ρ 是有界的，又 $|i|,|v|\to\infty$ 时 $W(i,v)\to\infty$，推知(2.1)的每个解有界．这就证明了引理．

手头的任务是找(2.1)中 f 与参数的条件以保证(2.1)的每个解当 $t\to\infty$ 时趋于一个平衡点．令 $f'(v)=df(v)/dv$.

引理 2.2 如果满足引理 2.1 的条件，又对所有 v 有 $f'(v)>0$，则(2.1)的每个解趋于(2.1)的唯一平衡点.

证明 首先，如果对所有 v 有 $f'(v)>0$，(2.1)显然只有一个平衡点. 如果

$$Q(i,v)=\frac{1}{2L}I^2+\frac{1}{2C}V^2, \tag{2.2}$$

则 Q 沿着(2.1)的解的导数是

$$\dot{Q}=-(RL^{-2}I^2+f'C^{-2}V^2)\leqslant 0. \tag{2.3}$$

由于引理 2.1 意味着(2.1)的所有解有界，只在平衡点有 $\dot{Q}=0$，从定理 1.3 推知引理 2.2 的断言是正确的.

在应用中最有意义的情形是 f' 改变符号，实际上能取小于 $-R^{-1}$ 的值，以致方程(2.1)有三个平衡点. 然而，如果 $f'>-R^{-1}$（只有一个平衡点），则如果不对 f 加另外的限制，就可能出现一个极限环. 事实上，可以证明

定理 2.1. 如果 $-f'<R^{-1}$，$\max\limits_{v}(-f'/C)>R/L$，则存在 E 的值，使得方程(2.1)至少有一个周期轨道.

证明 选取 E 使得平衡点 (i_0,v_0) 处 $-f'(v_0)/C>R/L$. 根据引理 2.1，有中心在 $(0,0)$ 的圆 Ω 使得(2.1) 的轨道由外部到内部穿过 Ω. 如果 $i=i_0+u$，$v=v_0+w$，$x=(u,v)$，则

$$\dot{x}=Ax+\cdots,\quad A=\begin{bmatrix}-RL^{-1} & -L^{-1}\\ C^{-1} & -f_0'C^{-1}\end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

这里…表示 x 的高阶项，$f_0'=f'(v_0)$. 定理的假设意味着 A 的特征值的实部是正的. 在 (2.4) 中用 $-t$ 代替 t 与用 $-A$ 代替 A 效果相同，而 $-A$ 是特征值实部为负的矩阵. 引理 1.6 意味着存在正定矩阵 B，使得 $W(x)=x'Bx$ 沿着(2.4)的解的导数当 $|x|\to 0$ 时满足 $\dot{W}(x)=-x'x+o(|x|^2)$. 回到原来的时间尺度，又利用引理1.2，可看出对于充分小的 $c>0$，(2.4) 的轨道从内到外地穿过椭圆

$x'Bx=c$，由一个这样的椭圆与圆Ω所界的环域包含(2.1)的一条正半轨．由 Poincaré-Bendixson 定理就推出定理的结果．

为了得到f'改变符号情况下更多的知识，首先注意到系统(2.1)可写为

$$L\frac{di}{dt}=\frac{\partial P}{\partial i},\qquad -C\frac{dv}{dt}=\frac{\partial P}{\partial v},\tag{2.5}$$

这里

$$P(i,v)=Ei-\frac{Ri^2}{2}-iv+\int_0^v f(s)\,ds$$

$$=-\frac{I^2}{2R}+U(v),\tag{2.6}$$

而

$$U(v)=\frac{(E-v)^2}{2R}+\int_0^v f(s)\,ds.\tag{2.7}$$

定理 2.2. 假设 $vf(v)\geqslant 0$，又存在 $A\geqslant 0$ 使得$|v|>A$时 $vf(v)>E^2/R$，对于所有 v 有

$$\frac{f'(v)}{C}+\frac{R}{L}>0,\tag{2.8}$$

则(2.1)的每个解当 $t\to\infty$ 时趋于(2.1)的一个平衡点．

证明 考虑函数 $S=Q+\lambda P$，这里的 Q 由(2.2)定义，P由(2.6)定义，而

$$-\frac{f'}{C}<\lambda<\frac{R}{L}.\tag{2.9}$$

通过某些直截了当但是冗长的演算，可证明P沿着(2.1)的解的导数是

$$\dot{P}=L^{-1}I^2-C^{-1}V^2.\tag{2.10}$$

于是关系式(2.3)与(2.10)意味着 $\dot{S}=\dot{Q}+\lambda\dot{P}$ 满足

$$\dot{S}=-[(R-\lambda L)L^{-2}I^2+(f'+\lambda C)C^{-2}V^2]\leqslant 0,$$

这里的 λ 是按(2.9)选取的．并且 $\dot{S}=0$，当且仅当 $I=0$，$V=0$，即仅在(2.1)的平衡点．由于根据引理 2.1，(2.1) 的所有解有界，定理的结论从定理 1.1 推出．

确定 (2.1) 的哪些平衡点稳定是有意义的．设 S 如定理 2.2 的证明中所定义的．如果 λ 满足(2.9)，则可以证明 S 的极值点是 (2.1)的平衡点．由于 $\dot{S}\leqslant 0$，从定理 1.1 与 1.2 推知(2.1)的稳定平衡点是 S 的极小值点，而不稳定平衡点则是 S 的其他极值点．

引理 2.3. 如果 λ 满足(2.9)，$\lambda\neq 0$，则 S 的极值点与 $I=0$，$\partial U/\partial v=0$ 的解一致．$U(v)$ 的每个严格局部极小值点表示 S 的一个局部极小值点，所以是(2.1)的稳定平衡点．

证明 由少许初等演算得到

$$\frac{\partial S}{\partial i}=-(RL^{-1}-\lambda)I+C^{-1}V,$$

$$\frac{\partial S}{\partial v}=-R^{-1}(RL^{-1}-\lambda)I-f'C^{-1}V+\lambda\frac{\partial U}{\partial v}.$$

如果 $\partial U/\partial v=0$，则 $R^{-1}(E-v)=f(v)$．如果 $I=0$，则 $i=R^{-1}(E-v)$．于是 $I=0$，$\partial U/\partial v=0$ 意味着 $V=0$，而这本身又意味着 S 的极值点．如果 $\partial S/\partial i=0,\partial S/\partial v=0$，则 $I=V=0$，而这本身又意味着 $\partial U/\partial v=0$．这就证明了引理的第一部分．

引理第二部分的证明留作习题，包括证明：若 $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}>0$ 则在平衡点计算的二次型

$$\frac{\partial^2 S}{\partial i^2}\xi_0^2+2\frac{\partial^2 S}{\partial i\partial v}\xi_0\xi_1+\frac{\partial^2 S}{\partial v^2}\xi_1^2$$

是正定的．

习题 2.1. 若 $f(v)$ 有如图 2.2a 及 2.2b 所示的图象的情况，试解释上面各结果．

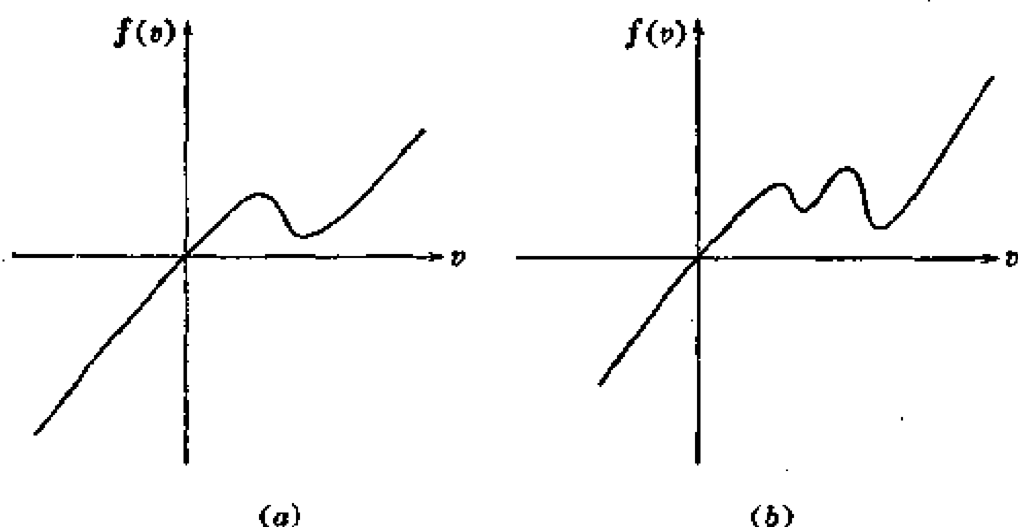


图 X.2.2

X.3. 非自治系统稳定的充分条件

在这节里，我们叙述第1节的结果对非自治系统

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{3.1}$$

的某些引伸．这里的 $f:[\tau,\infty)\times R^n\to R^n$（$\tau$ 是常数）足够地光滑，以保证通过 $[\tau,\infty)\times R^n$ 内的每个点 (t_0,x_0) 有解，这个解是唯一的，并且连续地依赖于初始数据．设 Ω 是 R^n 内包含零点的开集．如果函数 $V:[\tau,\infty)\times\Omega\to R$ 连续，$V(t,0)=0$，并且有正定函数 $W:\Omega\to R$，使得对于 $[\tau,\infty)\times\Omega$ 中所有的 (t,x) 有 $V(t,x)\geqslant W(x)$，则 V 叫作正定的．如果有正定函数 $W(x)$，使得对于 $[\tau,\infty)\times\Omega$ 中的 (t,x) 有 $V(t,x)\leqslant W(x)$，则 $V(t,x)$ 叫作具有无穷小上界的．如果 $V:[\tau,\infty)\times\Omega\to R$ 是连续的，我们定义 V 沿着(3.1)的导数 $\dot{V}(t,\xi)$ 为

$$\dot{V}(t,\xi)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h,x(t+h,t,\xi))-V(t,\xi)],$$

这里的 $x(t,\sigma,\xi)$ 是(3.1)的通过 $(\sigma,\xi)\in[\tau,\infty)\times R^n$ 的解．如果 $V(t,\xi)$ 有对于 t,ξ 连续的偏导数，则

$$\dot{V}(t,\xi)=\frac{\partial V(t,\xi)}{\partial t}+\frac{\partial V(t,\xi)}{\partial\xi}f(t,\xi).$$

定理 3.1. 如果 $V:[\tau,\infty)\times\Omega\to R$ 正定，又 $\dot{V}(t,x)\leqslant 0$，则(3.1)的解 $x=0$ 稳定. 此外，如果 V 还有无穷小上界，则解 $x=0$ 是一致稳定的. 如果再有 $-\dot{V}$ 正定，则(3.1)的解 $x=0$ 一致渐近稳定.

证明 由于 $V(t,x)$ 正定，存在正定函数 $W(x)$ 使得对于所有 $(t,x)\in[\tau,\infty)\times\Omega$ 有 $V(t,x)\geqslant W(x)$. 设 $B(r)$ 是在 R^n 内中心在原点半径为 r 的球. 存在 $r>0$ 使得 $B(r)\subset\Omega$. 对于 $0<\varepsilon<r$，记 $k=\min\limits_{|x|=\varepsilon}W(x)$，则 $k>0$. 对于任意 $t_0\in[\tau,\infty)$，设 $0<\delta<\varepsilon$ 是一数，使得 $|x|\leqslant\delta$ 时 $V(t_0,x)<k$. 由于 $V(t_0,0)=0$ 及 V 连续，这样的 δ 总是存在的. 如果 x_0 在 $B(\delta)$ 内，设(3.1)的满足 $x(t_0)=x_0$ 的解为 $x(t)$，由于 $\dot{V}(t,x)\leqslant 0$ 意味着 $t\geqslant t_0$ 时 $V(t,x(t))\leqslant V(t_0,x_0)$，对于 $t\geqslant t_0$，$x(t)$ 在 $B(\varepsilon)$ 内. 这证明了 $x=0$ 稳定.

此外，如果 V 有无穷小上界，则有正定函数 $W_1(x)$，使得对于所有 $(t,x)\in[\tau,\infty)\times\Omega$ 有 $V(t,x)\leqslant W_1(x)$. ε,k 如上所取，再选 $\delta>0$ 使得 $|x|\leqslant\delta$ 时 $W_1(x)<k$. 对于任意 $t_0\in[\tau,\infty)$，$x_0\in B(\delta)$，设(3.1)的满足 $x(t_0)=x_0$ 的解为 $x(t)$. 由于对所有 t 有 $V(t,x(t))\leqslant V(t_0,x_0)\leqslant W_1(x_0)$，当 $t\geqslant t_0$ 时 $x(t)$ 在 $B(\varepsilon)$ 内. 这证明了 $x=0$ 一致稳定.

更进一步，如果 $-\dot{V}(t,x)$ 正定，则存在正定函数 $W_2(x)$，使得对于所有 $(t,x)\in[\tau,\infty)\times\Omega$ 有 $-\dot{V}(t,x)\geqslant W_2(x)$. 现在可按照与定理 1.1 的证明相似的方式进行证明.

设 $R^+=[0,\infty)$. $V(t,x):R^+\times R^n\to R$ 连续，G 是 R^n 内的任意集合而 $\bar{G}$ 是其闭包，我们说 V 是(3.1) 在 G 上的 Liapunov 函数，如果

(i) 在 $\bar{G}$ 内给定 x，存在 x 的邻域 N，使得 $V(t,x)$ 对所有 $t\geqslant 0$ 及所有 $x\in N\cap G$ 是下有界的.

(ii) 对于 $(t,x)\in R^+\times G$ 有 $\dot{V}(t,x)\leqslant -W(x)\leqslant 0$，这里的 W

在 $\bar{G}$ 上连续.

如果 V 是(3.1)在 G 上的 Liapunov 函数，我们定义

$$E=\{x\in\bar{G}:W(x)=0\}.$$

定理 3.2. 设 V 是(3.1)在 G 上的 Liapunov 函数，又设 $x(t)$ 是(3.1)的解，对于 $t\geqslant t_0\geqslant 0$, $x(t)$ 有界且停留在 G 内.

(a) 如果对于每个 $\bar{G}$ 内的 P，有 P 的邻域 N，使得对于所有 $t\geqslant 0$ 与所有 $x\in N\cap G$, $|f(t,x)|$ 有界，则 $t\to\infty$ 时 $x(t)\to E$.

(b) 如果 W 在 $\bar{G}$ 上有连续的一阶导数，又沿着解 $x(t)$, $\dot{W}=(\partial W/\partial x)f(t,x)$ 上有界(或下有界)，则 $t\to\infty$ 时 $x(t)\to E$.

证明 设 p 是 $x(t)$ 的有限正极限点，又 $\{t_n\}$ 是这样的实数序列，当 $n\to\infty$ 时 $t_n\to\infty$，使得 $x(t_n)\to p$. Liapunov 函数定义中的条件(i)与(ii)意味着 $V(t_n,x(t_n))$ 非增且下有界. 因此，有常数 c 使得 $n\to\infty$ 时 $V(t_n,x(t_n))\to c$，又由于 $V(t,x(t))$ 非增，故 $t\to\infty$ 时 $V(t,x(t))\to c$. 此外，

$$V(t,x(t))\leqslant V(t_0,x(t_0))-\int_{t_0}^{t}W(x(s))ds,$$

因此

$$\int_{t_0}^{\infty}W(x(s))ds<\infty.$$

(a) 假设 p 不在 E 内. 设 $\delta>0$ 满足 $W(p)>2\delta>0$. 有 $\varepsilon>0$ 使得对于 $x\in S_{2\varepsilon}(p)=\{x:|x-p|<2\varepsilon\}$ 有 $W(x)>\delta$. 此外，ε 可以选得使 $S_{2\varepsilon}(p)\subset N$, N 是(a)中给出的邻域. 如果对于所有 $t\geqslant t_1\geqslant t_0$, $x(t)$ 留在 $S_{2\varepsilon}(p)$ 内，则 $\int_{t_1}^{\infty}W(x(s))ds=+\infty$，而这就有了矛盾. 由于 p 在 $x(t)$ 的极限集内，因而仅有的可能是 $x(t)$ 离开又返回 $S_{2\varepsilon}(p)$ 无穷次. 由于 $|f(t,x)|$ 在 $S_{2\varepsilon}(p)$ 内有界，这意味着 $x(t)$ 每次返回 $S_{2\varepsilon}(p)$ 必停留在 $S_{2\varepsilon}(p)$ 内至少一个正的时间 τ. 这再次意味着 $\int_{t_0}^{\infty}W(x(s))ds=+\infty$，又有了矛盾. 因此 $W(p)=0$，而 E

包含所有极限点.

(b) 由于$\int_{t_0}^{\infty} W(x(s))ds<\infty$, 又 $\dot{W}(x(t))$ 上有界 (或下有界),推出当 $t\to\infty$ 时 $W(x(t))\to 0$. 由于W连续, 故$W(p)=0$,这证明了(b).

例 3.1. 考虑方程

$$\begin{aligned} \dot{x}&=y \\ \dot{y}&=-x-p(t)y, \end{aligned} \tag{3.2}$$

这里 $p(t)\geqslant\delta>0$. 如果 $V(x,y)=(x^2+y^2)/2$, 则

$$\dot{V}=-p(t)y^2\leqslant-\delta y^2,$$

又 V 是 R^2 上的 Liapunov 函数, $W(x,y)=-\delta y^2$. 此外, $\dot{W}=-2\delta(xy+p(t)y^2)\leqslant-2\delta xy$. (3.2)的每个解显然有界, 因此满足定理 3.2 的条件(b). 集合 E 是 x 轴, 而定理 3.2 意味着(3.2)的每个解 $x(t)$, $y(t)$使得 $t\to\infty$ 时 $y(t)\to 0$. 另一方面, 如果 $p(t)=2+e^t$, 则(3.2)有解 $x(t)=1+e^{-t}$, $y(t)=-e^{-t}$. 由于方程是线性的,x 轴上的每个点是某个解的一个极限点. 这表明如果对 p 不作进一步限制,上面的结果是最好可能的结果.

请注意除非 $p(t)$有界,否则定理 3.2 的(a)中的条件在例 3.1 中并不满足.

验证(3.1) 的解 $x(t)$当 $t\geqslant t_0$ 时留在G内的一个简单方法由下述引理给出,它的证明留作习题.

引理 3.1. 假设 $V(t,x)$是 $R^+\times R^n$ 上的连续纯量函数, 又在 R^n 上有两个连续的纯量函数 $a(x)$, $b(x)$, 使得对于 $R^+\times R^n$ 内所有的(t,x), $a(x)\leqslant V(t,x)\leqslant b(x)$. 对于任意的实数 ρ, 令 $A_\rho=\{x\in R^n : a(x)<\rho\}$, 又设 G_0 是 A_ρ 的一个分支. 如果 G 是集合 $B_\rho=\{x\in R^n, b(x)<\rho\}$的包含在 G_0 内的分支, 又在 G_0 上 $\dot{V}\leqslant 0$, 则(3.1)的任意取 G 内 $x(t_0)$的解对所有 $t\geqslant t_0$ 而言, 停留在G 内.

请注意在引理 3.1 中，当$|x|\to\infty$时$a(x)\to\infty$意味着(3.1)的解无界.

X.4. 渐近稳定性的逆定理

在这节里，我们在一致渐近稳定性正确的前提下说明定理 3.1 的一类逆定理. 如果$V(t, x)$是$R^+\times R^n$上的连续纯量函数，而$x(t, t_0, x_0)$是(3.1)的满足$x(t_0, t_0, x_0)=x_0$的解，我们象在第 3 节中那样定义沿着(3.1)的解的导数$\dot V_{(3.1)}(t,\xi)$，即

$$\dot V_{(3.1)}(t,\xi)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h,x(t+h,t,\xi))-V(t,x)].$$

我们的第一个逆定理是处理线性系统的，因为实质性的想法都在其中出现，但又没有任何技术上的困难.

定理 4.1. 如果$A(t)$是$[0,\infty)$上的连续矩阵，而线性系统

$$\dot x=A(t)x \tag{4.1}$$

一致渐近稳定，则存在正的常数K, α与一个在$R^+\times R^n$上连续的纯量函数V，使得对于R^+内所有t与R^n内所有x, y,

$$\begin{aligned}&(a)\quad |x|\leqslant V(t,x)\leqslant K|x|,\\&(b)\quad \dot V_{(4.1)}(t,x)\leqslant -\alpha V(t,x),\\&(c)\quad |V(t,x)-V(t,y)|\leqslant K|x-y|.\end{aligned}\tag{4.2}$$

证明 根据定理 Ⅲ.2.1，存在正的常数K,α，使得(4.1)的符合$x(t_0, t_0, x_0)=x_0$的解$x(t, t_0, x_0)$对于所有$t\geqslant t_0\geqslant 0$与所有$x_0\in R^n$满足

$$|x(t,t_0,x_0)|\leqslant Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x_0|. \tag{4.3}$$

对于$t\geqslant 0$与$x_0\in R^n$，定义

$$V(t,x_0)=\sup_{\tau\geqslant 0}|x(t+\tau,t,x_0)|e^{\alpha\tau}, \tag{4.4}$$

从(4.3)直接知道$V(t,x_0)$对所有t, x_0有定义，并且满足(4.2a).

为验证(4.2c)，试观察

$$
\begin{aligned}
&|V(t,x_0)-V(t,y_0)|\\
&\leqslant \sup_{\tau\geqslant 0}|x(t+\tau,t,x_0)-x(t+\tau,t,y_0)|e^{\alpha\tau}\\
&=\sup_{\tau\geqslant 0}|x(t+\tau,t,x_0-y_0)|e^{\alpha\tau}\\
&=V(t,x_0-y_0)\leqslant K|x_0-y_0|.
\end{aligned}
$$

(4.2b)的证明进行如下:

$$
\begin{aligned}
\dot V_{(4.1)}(t,x_0)&=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\Big[\sup_{\tau\geqslant 0}|x(t+\tau+h,\ t+h,x_0)|e^{\alpha\tau}\\
&\qquad-\sup_{\tau\geqslant 0}|x(t+\tau,t,x_0)|e^{\alpha\tau}\Big]\\
&=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\Big[\sup_{\tau\geqslant h}|x(t+\tau,t,x_0)|e^{\alpha(\tau-h)}\\
&\qquad-\sup_{\tau\geqslant 0}|x(t+\tau,t,x_0)|e^{\alpha\tau}\Big]\\
&\leqslant\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\Big[\sup_{\tau\geqslant 0}|x(t+\tau,t,x_0)|e^{\alpha(\tau-h)}\\
&\qquad-\sup_{\tau\geqslant 0}|x(t+\tau,t,x_0)|e^{\alpha\tau}\Big]\\
&\leqslant\overline{\lim_{h\to 0^+}}\Big[\frac{1}{h}\sup_{\tau\geqslant 0}|x(t+\tau,\ t,x_0)|e^{\alpha\tau}(e^{-\alpha h}-1)\Big]\\
&=-\alpha V(t,x_0).
\end{aligned}
$$

剩下来只要证明 $V(t,x_0)$连续. 请注意

$$
\begin{aligned}
&|V(t+s,x_0+y_0)-V(t_0,x_0)|\\
&\leqslant|V(t+s,x_0+y_0)-V(t+s,x(t+s,t,x_0+y_0)|\\
&\quad+|V(t+s,x(t+s,t,x_0+y_0))-V(t,x_0+y_0)|\\
&\quad+|V(t,x_0+y_0)-V(t,x_0)|.
\end{aligned}
$$

从(4.2c)推出, 如果 s,y 甚小, 可使第一项与第三项甚小. 利用(4.1)的解对 t 的连续性和相似于证明 $\dot V_{(4.1)}$ 存在的论证, 可以说明如果 s 甚小, 第二项可以甚小. 这就证明了定理.

定理 4.1 是指数渐近稳定性的逆定理．事实上，如果有函数 V 满足(4.2)，又 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 是(4.1)的解，则

$$V(t,x(t))\leqslant e^{-\alpha(t-t_0)}V(t_0,x_0)\leqslant Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x_0|.$$

$V(t,x)\geqslant|x|$ 这一事实．意味着 $x(t)$ 满足(4.3)．

上述定理证明的基本要素是估计式(4.3) 与在 V 的定义中提升 x 的范数．如果不应用提升因子 $e^{\alpha t}$，将只可得 $\dot{V}\leqslant 0$.

我们的下一个目的是把定理 4.1 引伸到非线性方程(3.1)．我们需要

引理 4.1. 假设 $f(t,\ 0)=0$．(3.1)的解 $x=0$ 一致稳定，当且仅当存在满足下列性质的函数 $\rho(r)$：

(a) $\rho(r)$ 在区间 $0\leqslant r\leqslant r_1$ 上定义，连续而且单调增加，

(b) $\rho(0)=0$,

(c) 对于任意 $x\in R^n$，$|x|<r_1$ 与任意 $t_0\geqslant 0$，(3.1)的初值为 $x(t_0,\ t_0,x_0)=x_0$ 的解 $x(t,t_0,x_0)$ 满足

$$|x(t,t_0,x_0)|\leqslant\rho(|x_0|)\qquad 当\quad t\geqslant t_0 时.$$

证明 充分性是明显的．为证明必要性，假设给定了 $e>0$，又设 $\tilde{\delta}(e)$ 是出现在一致稳定性定义中的所有数 $\delta(e)$ 的上确界．则对于 R^n 中满足 $|x|\leqslant\tilde{\delta}(e)$ 的任意 x 与任意 $t_0\geqslant 0$，(3.1)的解 $x(t,t_0,x_0)$ 当 $t\geqslant t_0$ 时满足 $|x(t,\ t_0,x_0)|\leqslant e$．对于每个 $\delta_1>\tilde{\delta}$，在 R^n 内有一个满足 $|\tilde{x}_0|<\delta_1$ 的 $\tilde{x}_0$，使得 $|x(t,\ t_0,\ \tilde{x}_0)|$ 在某个 t 值超过 e．因此，$\tilde{\delta}(e)$ 是 $q>0$ 的非降、正函数，且当 e 趋于零时 $\tilde{\delta}(e)$ 趋于零．然而，$\tilde{\delta}(e)$ 可能不连续．现取 $e>0$ 的连续、单调增加函数 $\hat{\delta}(e)$，并使得 $\hat{\delta}(e)<\tilde{\delta}(e)$．设 ρ 是 $\hat{\delta}$ 的反函数．对于 R^n 中满足 $|x_0|\leqslant\hat{\delta}(e)$ 的任意 x_0，存在 e_1 使得 $|x_0|=\hat{\delta}(e_1)$，于是 $|x(t,t_0,x_0)|\leqslant e_1=\rho(|x_0|)$．这就证明了引理．

引理 4.2. (3.1) 的解 $x=0$ 一致渐近稳定，当且仅当存在这样的函数 $\rho(r)$ 与 $\theta(r)$，$\rho(r)$ 满足引理 4.1 的条件，$\theta(r)$ 在 $0\leqslant r$

$<\infty$ 上定义，连续而且单调下降，当 $\tau\to\infty$ 时 $\theta(\tau)\to 0$，使得对于 R^n 中任意 $|x_0|\leqslant r_1$ 的 x_0 与每个 $t_0\geqslant 0$，(3.1)的解 $x(t,t_0,x_0)$ 满足

$$|x(t,t_0,x_0)|\leqslant\rho(|x_0|)\theta(t-t_0),\qquad t\geqslant t_0.$$

这个引理的证明留作习题.

定理 4.2. 如果 $f(t,0)=0$，$f(t,x)$ 对 t 一致地满足对 x 的局部 Lipschitz 条件，又(3.1)的解一致渐近稳定，则存在 $r_1>0$，$K=K(r_1)>0$ 和 $0\leqslant r\leqslant r_1$ 上的正定函数 $b(r)$，正函数 $c(r)$ 以及对 $t\geqslant 0$，R^n 中 $|x|\leqslant r_1$ 的 x 定义与连续的纯量函数 $V(t,x)$，使得对于所有 $t\geqslant 0$ 与 R^n 中 $|x|\leqslant r_1$，$|y|\leqslant r_1$ 的 x,y，有

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad |x|\leqslant V(t,x)\leqslant b(|x|),\\
&(b)\quad \dot V_{(3.1)}(t,x)\leqslant -c(|x|)V(t,x)\leqslant -|x|c(|x|),\qquad (4.5)\\
&(c)\quad |V(t,x)-V(t,y)|\leqslant K|x-y|.
\end{aligned}
$$

证明 根据引理 4.2，有在 $0\leqslant r\leqslant r_1$，$0\leqslant\tau<\infty$ 上定义，连续而且取正值的函数 $\rho(r)$，$\theta(\tau)$，使得 $\rho(r)$ 对 r 严格增加，$\rho(0)=0$，$\theta(\tau)$ 对 τ 严格下降，$\tau\to\infty$ 时 $\theta(\tau)\to 0$，又对于 R^n 中满足 $|x|\leqslant r_1$ 的任意 x，(3.1)的解 $x(t,t_0,x_0)$ 满足

$$|x(t,t_0,x_0)|\leqslant\rho(|x_0|)\theta(t-t_0),\quad t\geqslant t_0\geqslant 0.$$

还可以假定 $\theta(\tau)$ 有连续的负导数，以及 $\theta(0)=1$. 根据 $\theta(\tau)$ 的性质，存在一个函数 $\alpha(\tau)$，它在 $\tau>0$ 上定义，连续可微并且取正值，$\alpha(0)=0$，$\alpha(\tau)$ 严格增加，当 $\tau\to\infty$ 时 $\alpha(\tau)\to\infty$，使得

$$\theta(\tau)=e^{-\alpha(\tau)},\qquad \tau\geqslant 0.$$

假设 $q(\tau)$ 是 $0\leqslant\tau<\infty$ 上的有界连续可微函数，使得 $q(0)=0$，$q(\tau)>0$，对于 $\tau>0$ 有 $q'(\tau)<\alpha'(\tau)$，q' 单调下降，又定义

$$V(t,x_0)=\sup_{\tau\geqslant 0}|x(t+\tau,t,x_0)|e^{q(\tau)}.$$

函数 $V(t,x_0)$ 对于 $t\geqslant 0$ 及 R^n 中满足 $|x_0|\leqslant r_1$ 的 x_0 有定义，并且满足

$$|x_0|\leqslant V(t,x_0)\leqslant\rho(|x_0|)\sup_{r\geqslant 0}e^{-\alpha(r)+q(r)}=\rho(|x_0|)\overset{\text{def}}{=\!=}b(|x_0|).$$

并且，由于在 $0<r\leqslant r_1$ 上存在连续正值的非降函数 $P(r)$，使得

$$\rho(|x|)e^{-\alpha(\tau)+q(\tau)}\leqslant|x|\qquad 当\ \tau\geqslant P(|x|)时,$$

推出

$$V(t,x_0)=\sup_{0\leqslant\tau\leqslant P(|x_0|)}|x(t+\tau,\ t,x_0)|e^{q(\tau)}.$$

因此，对于任意 $h>0$，存在 τ_h^*，$0\leqslant\tau_h^*\leqslant P(|x(t+h,t,x_0)|)$，使得 τ_h^* 对 h 连续，又

$$V(t+h,x(t+h,\ t,x_0))=|x(t+h+\tau_h^*,\ t,x_0)|e^{q(\tau_h^*)}.$$

如果 $h+\tau_h^*=\tau_h$，则

$$\begin{aligned}V(t+h,x(t+h,t,x_0))&=|x(t+\tau_h,t,x_0)|e^{q(\tau_h)}e^{-q(\tau_h)}e^{q(\tau_h-h)}\\&\leqslant V(t,x_0)e^{-q(\tau_h)}e^{q(\tau_h-h)}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\dot V_{(3.1)}(t,x_0)&\leqslant-V(t,x_0)\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{1}{h}[e^{q(\tau_h)}-e^{q(\tau_h-h)}]e^{-q(\tau_h)}\\&=-V(t,x_0)q'(\tau_0)\leqslant-V(t,x_0)q'(P(|x_0|))\\&\overset{\text{def}}{=\!=}-c(|x_0|)V(t,x_0)\\&\leqslant-|x_0|c(|x_0|).\end{aligned}$$

它证明了 (4.5b)。由于(3.1)中的 f 对 t 一致地满足对 x 的局部 Lipschitz 条件，对于任意 $r_0>0$，存在常数 $L=L(r_0)$，使得对于所有 $t\geqslant t_0$ 及满足 $|x(t,\ t_0,x_0)|\leqslant r_0$，$|x(t,\ t_0,x_0)|\leqslant r_0$ 的 x_0，y_0，有

$$|x(t,\ t_0,x_0)-x(t,\ t_0,y_0)|\leqslant e^{L(t-t_0)}|x_0-y_0|.$$

取 $r_0=\rho(r_1)$. 由于 $\rho(r)$ 对 r 是非降的，推出对于 $|x_0|$，$|y_0|\leqslant r$ 有

$$\begin{aligned}|V(t,x_0)-V(t,y_0)|\leqslant&\sup_{0\leqslant\tau\leqslant P(r)}|x(t+\tau,t,x_0)\\&-x(t+\tau,t,y_0)|e^{q(\tau)}\\\leqslant&[\sup_{0\leqslant\tau\leqslant P(r)}e^{L\tau}e^{q(\tau)}]|x_0-y_0|\end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=\!=} K(r)\,|x_0-y_0|.$$

对于 $r=r_1, K=K(r_1)$，这证明 V 满足定理中的不等式。

为证明 $V(t,x_0)$ 对 t,x_0 连续，我们考察

$$\begin{aligned}
&|V(t+h,x_0+y_0)-V(t,x_0)| \\
&\quad \leqslant |V(t+h,x_0+y_0)-V(t+h,x(t+h,t,x_0+y_0))| \\
&\qquad +|V(t+h,x(t+h,t,x_0+y_0))-V(t,x_0+y_0)| \\
&\qquad +|V(t,x_0+y_0)-V(t,x_0)|.
\end{aligned}$$

从 V 的 Lipschitz 性质及(3.1)的解的连续性，推知如果 h, y_0 甚小，可使第一项与第三项甚小. 利用与证明 $\dot{V}$ 存在相似的论证，可以看出如果 h 甚小，则第二项甚小.

定理证毕.

在第 3 节里，说明了函数 V 满足(4.5)意味着(3.1)的解 $x=0$ 一致渐近稳定. 因此，定理 4.2 是一致渐近稳定性的逆定理.

X.5. 渐近稳定性的涵义

在现实世界中出现的大多数应用中，微分方程并不是确切知道的. 因此，这些在物理上有意义的方程的解对于向量场的扰动应当是不敏感的，当然，扰动的类型由手头的问题决定. 于是，判断稳定性定义的用处的合理的判据，乃是检验这种性质对于向量场的扰动的灵敏性. 在这一节里，我们利用第 4 节的逆定理来讨论一致渐近稳定性对于任何只要是“小”的扰动的灵敏性. 我们需要

引理 5.1. 假设 f 满足定理 4.2 的条件，V 是在那个定理中给出的函数，$g(t,x)$ 是由 $R^+\times R^n$ 映入 R^n 的任意连续函数，考虑方程

$$\dot{x}=f(t,x)+g(t,x). \tag{5.1}$$

则对于 $t\geqslant 0$, $|x|\leqslant r_1$ 有

$$\dot{V}_{(5.1)}(t,x) \leqslant -c(|x|)V(t,x)+K|g(t,x)|. \tag{5.2}$$

证明 设 $x^*(t, t_0, x_0)$ 是(5.1)满足 $x^*(t_0, t_0, x_0)=x_0$ 的解，而 $x(t, t_0, x_0)$ 是(3.1)满足 $x(t_0, t_0, x_0)=x_0$ 的解. 利用 $\dot{V}_{(5.1)}$ 的定义与关系式(4.5b), (4.5c), 得到

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{(5.1)}(t,x_0) &= \overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h, x^*(t+h,t,x_0))-V(t,x_0)] \\
&= \overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h, x(t+h,t,x_0))-V(t,x_0) \\
&\quad +V(t+h, x^*(t+h,t,x_0)) \\
&\quad -V(t+h, x(t+h,t,x_0))] \\
&\leqslant \dot{V}_{(3.1)}(t,x_0)+K\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}|x^*(t+h,t,x_0) \\
&\qquad\qquad -x(t+h,t,x_0)| \\
&\leqslant \dot{V}_{(3.1)}(t,x_0)+K|g(t,x_0)| \\
&\leqslant -c(|x_0|)V(t,x_0)+K|g(t,x_0)|.
\end{aligned}$$

这就证明了引理.

从引理 5.1 直接推出许多结果. 事实上，如果 (3.1) 是线性的, 则方程(5.1)是

$$\dot{x}=A(t)x+g(t,x), \tag{5.3}$$

而定理 4.1 说(4.5) 中的 $c(|x|)$ 可以取为 $\alpha>0$. 因此, 不等式(5.2)成为

$$\dot{V}_{(5.3)}(t,x) \leqslant -\alpha V(t,x)+K|g(t,x)|. \tag{5.4}$$

如果 $\omega(t,r)$是 $R^+\times R^n$ 上的连续函数, 对 r 是非降的, 使得

$$|g(t,x)| \leqslant \omega(t,|x|), \tag{5.5}$$

则可见(4.2a)与(5.5)意味着

$$\dot{V}_{(5.3)} \leqslant -\alpha V+K\omega(t,V). \tag{5.6}$$

利用 I.6 节中关于微分不等式的基本结果与关系式 (4.2), 可以陈述

定理 5.1. 假设(5.5)中的 $\omega(t,u)$ 使得对于任意 $t_0\geqslant 0$, $u_0\geqslant 0$, 方程

$$\dot{u}=-\alpha u+K\omega(t,u) \tag{5.7}$$

有唯一通过 t_0,u_0 的解. 如果 $u(t,t_0,u_0)$ 是 (5.7) 满足 $u(t_0,t_0,u_0)=u_0$ 的解, 它对于 $t\geqslant t_0$ 与 $u_0\geqslant K|x_0|$(x_0 在 R^n 内, 且 $|x_0|\leqslant r_1$)是存在的, 则(5.3)满足 $x(t_0,t_0,x_0)=x_0$ 的解 $x(t,t_0,x_0)$ 满足

$$|x(t,t_0,x_0)|\leqslant u(t,t_0,u_0),\quad t\geqslant t_0.$$

引理 5.1 的另一个应用是

定理 5.2. 如果 f 满足定理 4.2 的条件, 又 (3.1) 的解 $x=0$ 是一致渐近稳定的, 则有 $r_1>0$ 使得对于任意 $e(0<e<r_1)$ 与任意 $r_2(e<r_2\leqslant r_1)$, 存在 $\delta>0$ 与 $T>0$, 使得对于所有 $t_0\geqslant 0$, $x_0\in R^n$, $e\leqslant|x_0|\leqslant r_2$, (5.1)的初值为 $x(t_0,t_0,x_0)=x_0$ 的解当 $t\geqslant t_0+T$ 时满足 $|x(t,t_0,x_0)|<e$. 只要对于所有 $t\geqslant 0$, $|x|\leqslant r_1$, $|g(t,x)|<\delta$.

证明 定理的假设意味着存在满足定理 4.2 的条件 (4.5) 的函数 $V(t,x)$. 象定理 4.2 中一样选取 r_1. 不损一般性, 我们可以假定(4.5)中的函数 $b(s)$, $c(s)$ 是非降的. 对于定理中任意的 e, r_2, 我们知道 $e\leqslant|x|\leqslant r_2$ 意味着 $c(e)>0$ 与 $e<V(t,x)<b(r_2)$. 并且由引理 5.1 推知对于所有的 $t\geqslant 0$, $e\leqslant|x|\leqslant r_2$ 有

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(5.1)}(t,x)&\leqslant -c(e)V(t,x)+K|g(t,x)|\\&\leqslant -c(e)e+K|g(t,x)|.\end{aligned}$$

因此, 如果 $x=x(t)$ 表示(5.1)取 $x(t_0)=x_0$($e\leqslant|x_0|\leqslant r_2$)的解, 又 $K\delta<ec(e)/2$, 且对于所有 $t\geqslant 0$, $|x|\leqslant r_1$ 有 $|g(t,x)|<\delta$, 则只要 $e\leqslant|x(t)|\leqslant r_2$, 就有 $\dot{V}_{(5.1)}(t,x(t))\leqslant -ec(e)/2$. 这显然意味着当 $t\geqslant T>2b(r_2)/ec(e)$ 时 $|x(t_0+t,t_0,x_0)|<e$. 定理证毕.

还可以继续推导另外一些较特殊的结果, 但定理 5.1 与 5.2 可能已经说明了 Liapunov 逆定理是很有用的.

X.6. 对进一步学习的说明与建议

前面各页的主要论题是用Liapunov直接法确定具体微分方程的解的稳定性与推导出稳定性概念的定性结论. 本章只是一个引论，较广泛的讨论可在Hahn[1], Krasovskii[1], LaSalle与Lefschetz[1], Halanay[1], Yoshizawa[2], Zubov[1]中找到, 第1与第3节所用的Liapunov函数定义可以在LaSalle[2]中找到. 定理1.1, 引理1.5与定理3.1是Liapunov[1]提出的，定理1.2实际上是Četaev[1]提出的, 习题1.5归于Hartman[2]. 第2节内容是以Moser的论文[1]为根据的. 第4节中逆定理的证明, 想法是Massera[1]提出的.

Liapunov直接法的基本概念可用于由泛函微分方程与偏微分方程所描述的系统. 关于泛函微分方程的讨论及进一步的参考文献，请看Krasovskii[1], Halanay[1], Hale[8], Cruz与Hale[1]. 关于偏微分方程，请参考Zubov[1], Infante与Slemrod[1].

附录 殆周期函数

在这个附录里，我们收集了与正文中的讨论有关系的关于殆周期函数的知识．很少列出证明，因为大多数结果容易在关于这些题材的标准教本中看到；例如

H. Bohr, *Almost Periodic Functions*, Chelsea, New York, 1947.

A. S. Besicovitch, *Almost Periodic Functions*, Dover, N. Y., 1954.

J. Favard, *Fonctions presque-periodiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

B. M. Levitan, *Almost Periodic Functions* (Russian), Moscow, 1953.

不那么经典的结果加以详细证明．

定义 1. 一个对 $-\infty<t<\infty$ 定义而且连续的函数 $f(t)$（实的或复的）叫作一致殆周期(a. p.)函数，如果对于任意 $\eta>0$，存在 $l=l(f,\eta)>0$，使得在任何长度为 l 的区间里，存在一个 τ，使得

$$|f(t+\tau)-f(t)|<\eta,\ -\infty<t<\infty,$$

［或等价地，$|f(t)-f(t-\tau)|<\eta,\ -\infty<t<\infty$］.

τ 称为 f 相对于 η 的一个殆周期．

例 1. 连续周期函数都是殆周期函数．

证明 假设 f 是周期为 T 的连续周期函数．取 $l=T$，考虑区间 $I_\gamma=[\gamma,\gamma+T]$，$\gamma$ 是任意实数．如果 $\gamma=(n-1)T+\delta$，n 是整数，而 $0\leq\delta<T$，则 I_γ 包含点 nT，而且 $f(t+nT)-f(t)=0$，于是 $\tau=nT$ 是 f 相对于任意 $\eta>0$ 的一个殆周期．

例 2. $f(t)=e^{it}+e^{i\sqrt{2}t}$ 是殆周期函数．

证明 大家知道，存在 $\alpha>0$，$M>0$，与一个这样的正整数序列 p_j、q_j，$0<p_j<q_j$，q_j 对 j 是单调的，当 $j\to\infty$ 时 $q_j\to\infty$，$q_{j+1}-q_j<M$，$j=1,2,\cdots$，使得

$$\left|\sqrt{2}-1-\frac{p_j}{q_j}\right|\leq\frac{\alpha}{q_j^2},\quad j=1,2,\cdots.$$

我们可以假定 q_j 是这样选取的，对于任意 $\eta>0$，只要 $|\beta|<\alpha$，$2[1-$

$\cos(2\pi\beta/q_j)]<\eta$ 对于所有 j 成立。令 $l=\max(M,2q_1)$，考虑区间 $I_\gamma=[\gamma,\gamma+l]$，这里的 γ 是任意的实数。在集合$\{\pm 2\pi q_j,\ j=1,2,\cdots\}$中，有唯一元素比方说是 $2\pi q_{r-1}$，它是这个集合中小于或等于 γ 的最大数。令 $2\pi q_r$ 记这个集合中大于 $2\pi q_{r-1}$ 的最小数。根据上述 l 的选取法，$2\pi q_r$ 属于区间$[\gamma,\gamma+l]$。令 $\tau=2\pi q_r$。由于$q_r(\sqrt{2}-1)=p_r+\beta_r/q_r$，$|\beta_r|<\alpha$，可得

$$|f(t+\tau)-f(t)|=|e^{i(\sqrt{2}-1)\tau}-1|=|e^{i2\pi\beta_r/q_r}-1|$$
$$=2[1-\cos(2\pi\beta_r/q_r)]<\eta.$$

因此 $f(t)$是殆周期函数。

引理 1. 每个 a.p. 函数在$(-\infty,\infty)$上有界而且一致连续。

证明 如果 $f(t)$是殆周期函数，则对于任意 $\eta>0$，存在一个 l 并在每个长为 l 的区间$[t-l,t]$内存在一个 τ，使得

$$|f(t)-f(t-\tau)|<\eta,\ \text{对所有}\ t\in(-\infty,\infty).$$

如果我们令 $t'=t-\tau$，则 $0\leqslant t'\leqslant l$ 且$|f(t)-f(t')|<\eta$。如果对 $0\leqslant t'\leqslant l$ 有$|f(t')|\leqslant B$，则对所有 $t\in(-\infty,\infty)$ 有$|f(t)|\leqslant B+\eta$。这就证明了有界性。

假设 η、l 与上相同，由于 f 连续，它在$[-l,l]$上一致连续，而我们可以找到 $\delta<l$，使得

$$|f(t_1')-f(t_2')|<\eta,\ \text{当}\ |t_1'-t_2'|<\delta,\ t_1',t_2'\in[-l,l].$$

对于任意满足 $t_1<t_2$，$|t_1-t_2|<\delta$ 的 t_1 与 t_2，考虑区间$[t_1,t_1+l]$。令 τ 为在这个区间里的相对于 η 的殆周期。则 $t_1'=t_1-\tau$，$t_2'=t_2-\tau$ 都在 $[-l,l]$ 内，并且$|f(t_1)-f(t_1')|<\eta$，$|f(t_2)-f(t_2')|<\eta$。利用三角不等式得$|f(t_1)-f(t_2)|<3\eta$，这就证明了一致连续性。

定义 2. (Bochner)。假设 f 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的函数。f 的平移集合是定义在$(-\infty,\infty)$上的函数 $f(\cdot+h)$的集合，这里 h 是任意实数。$-\infty<t<\infty$上的连续函数 $f(t)$ 被称为正规函数，如果 f 的平移集合依在$(-\infty,\infty)$ 上一致收敛的意义是相对紧致的；即，每个函数序列 $f(t+h_j)$，$j=1,2,\cdots$总有一致收敛的子序列。f 的外壳 $H(f)$ 是 f 的平移集合在一致收敛意义下的闭包。

定理 1. $f(t)$是 a.p. 函数，当且仅当 $f(t)$ 是正规函数。

a.p. 函数的性质

I. $f(t)$是 a.p. 函数，意味着$f(t+a)$、$f(at)$(a 为实数)、$f(t)+k$、$kf(t)$(k 为复数)、$\overline{f}(t)$、$|f(t)|$、$f^n(t)$(n 为正整数)都是 a.p. 函数。

I. 一致收敛的 a. p. 函数序列的极限是 a. p. 函数. 特别地, 如果 f 是 a. p. 函数, 则 $H(f)$ 中每个 g 是 a. p. 函数.

II. $f(t)$ 是 a. p. 函数且 $|f(t)|\geqslant b>0$, 意味着 $1/f(t)$ 是 a. p. 函数.

IV. $f(t)$ 是 a. p. 函数且 df/dt 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续, 意味着 $df(t)/dt$ 是 a. p. 函数.

V. 假设 $F(y_1,\cdots,y_n)$ 在集合 Ω 上一致连续, $f_1(t),\cdots,f_n(t)$ 都是 a. p. 函数并且对于每个 t, $(f_1(t),\cdots,f_n(t))$ 属于 Ω, 则 $F(f_1(t),\cdots,f_n(t))$ 是一个 a. p. 函数; 特别地, 如果 f、g 是 a. p. 函数, 则 $f+g$, fg 是 a. p. 函数.

VI. 如果 f 是 a. p. 函数, 则 $\int^t f$ 是 a. p. 函数, 当且仅当 $\int^t f$ 有界.

例 3. 设 λ_n, $n=1,2,\cdots$ 是实数序列, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{i\lambda_nt}$ 是一个 a. p. 函数(根据性质 I).

定理 2. $f(t)$ 是 a. p. 函数意味着平均值

$$M[f]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{t+T}f(u)du$$

存在并且不依赖于 t.

如果 f 是 a. p. 函数, 又 λ 是实数, 我们定义

$$a(\lambda)=M[f(\cdot)e^{i\lambda\cdot}]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

引理 2. 如果 $f(t)$ 是 a. p. 函数, 则只有可列的无穷个 λ 使得 $a(\lambda)\neq 0$.

下面, 我们记使 $a(\lambda)\neq 0$ 的 λ 为 $\{\lambda_j\}$, 称它们为 f 的 Fourier 指数, 又记 Fourier 系数为 $a_j=a(\lambda_j)$. f 的 Fourier 级数定义为而且记作

$$f(t)\sim\sum a_je^{i\lambda_jt}.$$

定理 3. 如果 f 不等于 g, 而 f 与 g 都是 a. p. 函数, 则它们的 Fourier 级数是不同的. 此外, 如果 $f\sim\sum a_ne^{i\lambda_nt}$, 则 $\sum|a_n|^2<\infty$. 在这种安排下, 通常关于 Fourier 级数的运算都正确.

例 4. 即使一个 a. p. 函数的平均值等于零, 它的积分也不一定是 a. p. 函数. 事实上, 如果

$$f(t)\sim\sum\frac{1}{n^2}e^{it/n^2},$$

又 $\int^t f$ 是 a. p. 函数, 则

$$\int^t f \sim \Sigma(-i)e^{i t/n^2}.$$

然而，系数的平方和是发散的，它与定理3相矛盾.

引理 3. 如果 f 是 a.p. 函数，其 Fourier 指数 $\{\lambda_j\}$ 满足 $|\lambda_j|>\alpha>0$，$j=1,2,\cdots$，则 $\int^t f$ 是a.p. 函数.（见 Levitan 书第 80 页）.

定义 3. 假设 $\{\lambda_n\}$ 是任意的实数集合. 集合 $\{\lambda_n\}$ 的加法群 $m\{\lambda_n\}$ 是由集合 $\{\lambda_n\}$ 的元素的所有整系数线性组合所得的实数组成的集合.

定义 4. 实数集合 $\{\alpha_j\}$ 是（关于有理数）线性无关的，如果对于任意 N 与有理数 r_j，只要 $\sum\limits_{j=1}^{N} r_j\alpha_j=0$，则所有 $r_j=0$.

例 5. $(1,\sqrt{2})$ 是线性无关的.

定义 5. 如果 $\{\gamma_n\}$ 是任意的实数序列，我们说 $\{\alpha_j\}$ 是这个集合的一组（有理）基，如果

(i) $\{\alpha_j\}$ 线性无关.

(ii) $\{\gamma_n\}$ 中每一个 γ 是 $\{\alpha_j\}$ 的元素用有理系数作出的有限线性组合. 如果碰巧 $\{\gamma_n\}$ 中每一 γ 可以表示成 $\{\alpha_j\}$ 的元素用整系数作出的有限线性组合，则我们说 $\{\alpha_j\}$ 是 $\{\gamma_n\}$ 的一组整基.

例 6. n 为整数，$\{n\omega\}$ 有整基 $\{\omega\}$.

n、m 都是整数，$\{n+m\sqrt{2}\}$ 有整基 $\{1,\sqrt{2}\}$.

$n=1,2,\cdots$，$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 有有理基 $\{1\}$.

定义 6. 如果 $f(t)$ 是 Fourier 指数为 $\{\lambda_j\}$ 的 a.p. 函数，定义 f 的加法群 $m(f)$ 为 $m\{\lambda_j\}$. 如果 $m(f)$ 有有限的整基，则称 f 为拟周期函数. 如果 $m(f)$ 有由一个数 β 组成的基，就称 f 为极限周期函数.

定理 4. (Favard 书第 81 页). 假设 f、g 都是 a.p. 函数. 如果对于任意使得 $f(t+\tau_j)$ 当 $j\to\infty$ 时一致收敛到某函数 $f^*(t)$ 的实数序列 $\{\tau_j\}$，$j=1,2,\cdots$，都可推出 $g(t+\tau_j)$ 一致收敛到某个函数 $g^*(t)$，则 $m(g)\subset m(f)$.

在应用到微分方程时，一个比定理 4 更一般的结果是方便的，它可用一个逼近定理推导出来.

定理 5. (Favard 书第 56 页). 如果 f 是 a.p. 函数，$f\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\lambda_n t}$，则

存在一序列整数 $K(k)$ 与一序列有限三角和

$$\sigma_k(t)=\sum_{1}^{K(k)} r_n^{(k)} a_n e^{i\lambda_n t},$$

使得当 $k\to\infty$ 时 $\sigma_k(t)-f(t)\to 0$ 一致成立. 此外, 系数 $r_n^{(k)}$ 不依赖于 a_n.

定理 6. 假设 f 是指数为 $\{\lambda_n\}$ 的 a. p. 函数, 又令 Λ 为 $\{\lambda_n\}$ 的任意有限子集. 如果 $\{\tau_j\}$ 是一个实数序列, 使得对于所有 $\lambda_n\in\Lambda$, 当 $j\to\infty$ 时 $e^{i\lambda_n\tau_j}\to 1$, 则当 $j\to\infty$ 时, 对 t 一致地有

$$|f(t+\tau_j)-f(t)|\to 0.$$

证明 假设 $\Lambda=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_N\}$. 根据定理 5, 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在整数 $k=k(\varepsilon)$ 使得

$$|f(t)-\sigma_k(t)|<\varepsilon,\quad t\in(-\infty,\infty).$$

对于这个 k 与 ε, 存在整数 $J(\varepsilon)$, 使得当 $n=1,2,\cdots,N$ 与 $j\geqslant J(\varepsilon)$ 时

$$\sum_{k=1}^{K(k)}|r_n^{(k)}a_n|\cdot|e^{i\lambda_n\tau_j}-1|<\varepsilon.$$

因此,

$$\begin{aligned}|f(t+\tau_j)-f(t)|&\leqslant 2\varepsilon+|\sigma_k(t+\tau_j)-\sigma_k(t)|\\&\leqslant 2\varepsilon+\sum_{n=1}^{K(k)}|r_n^{(k)}a_n|\cdot|e^{i\lambda_n\tau_j}-1|\\&\leqslant 3\varepsilon,\quad \text{如果 } j\geqslant J(\varepsilon).\end{aligned}$$

这就证明了定理.

定理 7. 假设 $f(t)$ 是给定的实变量 t 的复值函数, 而 $\{\lambda_n\}$ 是任意实数的非空集. 如果对于每个实数序列 τ_j, 条件

$$\lim_{j\to\infty} e^{i\lambda_n\tau_j}=1\quad \text{对所有 } \lambda_n \text{ 成立}$$

意味着条件

$$\lim_{j\to\infty} f(t+\tau_j)=f(t)\quad \text{对 } t \text{ 一致地成立},$$

则 f 是 a. p. 函数.

证明 这个证明应归于 G. Meisters. 我们证明 f 是正规函数. 首先, 由于对任意序列 $\tau_j\to 0$ 假设条件意味着 $\lim_{j\to\infty} f(t+\tau_j)=f(t)$, 故 f 是连续的. 为了证明 f 的平移集合相对于一致收敛性是相对紧致的, 设 τ_j 是任意的实数序列. 由于单位圆是紧的, 存在一个 τ_j 的子序列 $\tau_j^{(1)}$ 与一个实数 θ_1, 使得

$$\lim_{j\to\infty} e^{i\lambda_1\tau_j^{(1)}} = e^{i\lambda_1\theta_1},\ 0\leqslant\lambda_1\theta_1<2\pi.$$

用熟悉的对角化手续，我们可以把这个过程延续到求得一个 τ_j 的子序列 τ_j' 与一个实数序列 θ_n，$0\leqslant\lambda_n\theta_n<2\pi$，$n=1, 2, \cdots$ 使得

$$\lim_{j\to\infty} e^{i\lambda_n(\tau_j'-\theta_n)} = 1,\quad n=1, 2, \cdots.$$

于是，假设的条件意味着对于每个 n，当 $j\to\infty$ 时 $f(t+\tau_j'-\theta_n)$ 一致收敛到 $f(t)$。因此，对于每个 n，当 $j\to\infty$ 时 $f(t+\tau_j')$ 一致收敛到 $f(t+\theta_n)$。这说明 f 是正规函数，定理证毕。

定理 8. 假设 f 是 a.p. 函数，而 g 是任意给定的实变量 t 的复值函数。如果对于每个使得 $j\to\infty$ 时 $f(t+\tau_j)-f(t)\to 0$ 对 t 一致成立的实数序列 $\{\tau_j\}$，可以推出当 $j\to\infty$ 时 $g(t+\tau_j)-g(t)\to 0$ 对 t 一致成立，则 g 是 a.p. 函数，且 $m[g]\subset m[f]$。

证明 对于序列 τ_j 选取一个满足定理 6 的条件的序列。则当 $j\to\infty$ 时 $f(t+\tau_j)-f(t)\to 0$ 对 t 一致成立，于是根据假设知当 $j\to\infty$ 时 $g(t+\tau_j)-g(t)\to 0$ 对 t 一致成立。因此由定理 7 断言 g 是 a.p. 函数。$m[g]\subset m[f]$ 这个事实则是从 Favard 书第 81 页的理由推出来的。

在关于 a.p. 函数的上述性质 VI 中，说到如果 f 是 a.p. 函数，则 $\int^t f$ 是 a.p. 函数当且仅当这个积分有界。下面这个由 Bogoliubov [1] 提供的结果牵涉到用 a.p. 近似来解方程 $\dot{y}-f(t)=0$，这里 f 是 $M[f]=0$ 的 a.p. 函数，不一定具有有界的积分。

引理 4. 假定 C^n 中的 f 是 a.p. 函数，并且 $M[f]=0$。则对于每个 $\eta>0$，存在 $0<\eta<\infty$ 上的连续纯量函数 $\zeta(\eta)$，当 $\eta\to 0$ 时 $\zeta(\eta)\to 0$，使得由

$$f_\eta(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-\eta(t-s)}f(s)ds \tag{1}$$

定义的殆周期函数 f_η 对于所有 $t\in R$ 满足

$$\begin{aligned}&(a)\quad |f_\eta(t)|\leqslant\eta^{-1}\zeta(\eta),\\&(b)\quad |df_\eta(t)/dt-f(t)|\leqslant\zeta(\eta).\end{aligned} \tag{2}$$

此外 $m(f_\eta]=m[f]$。

证明 由于 $M[f]=0$，存在 $0<T<\infty$ 上的连续非增纯量函数 $\varepsilon(T)$，当 $T\to\infty$ 时 $\varepsilon(T)\to 0$，使得对于所有 $t\in R$ 有 $\left|T^{-1}\int_t^{t+T}f(s)ds\right|\leqslant\varepsilon(T)$。并且，对于任意 $T>0$，

$$f_\eta(t)=\int_0^\infty e^{-\eta s}f(t-s)ds=\sum_{k=0}^\infty e^{-\eta kT}\int_{kT}^{(k+1)T}f(t-s)e^{-\eta(s-kT)}ds.$$

如果B是$|f(t)|$在$(-\infty,\infty)$上的界，则由上面这个关系式产生

$$|f_\eta(t)|\leqslant\sum_{k=0}^\infty e^{-\eta kT}\left|\int_{kT}^{(k+1)T}f(t-s)ds\right|$$

$$+B\sum_{k=0}^\infty e^{-\eta kT}\int_{kT}^{(k+1)T}(1-e^{-\eta(s-kT)})ds$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^\infty e^{-\eta kT}\varepsilon(T)T+B\int_0^T(1-e^{-\eta s})ds\sum_{k=0}^\infty e^{-\eta kT}$$

$$\leqslant\varepsilon(T)T[1-e^{-\eta T}]^{-1}+BT.$$

由于$T\to\infty$时$\varepsilon(T)$非增地趋于零，方程式$1-e^{-\eta T}=\varepsilon(T)$总有唯一的解．假设$T_\eta$被选作此解．由于对所有$T$有$\varepsilon(T)>0$，显然当$\eta\to0$时$T_\eta\to\infty$，而这个事实与当$T\to\infty$时$\varepsilon(T)\to0$一起意味着$\eta\to0$时$\eta T_\eta\to0$．解$T_\eta$显然是$\eta$的连续函数．如果我们令$\zeta(\eta)=(B+1)\eta T_\eta$，则关系(2$a$)就证明了．

从(1)式推出

$$\frac{df_\eta(t)}{dt}-f(t)=-\eta f_\eta(t).\tag{3}$$

因此，从(2a)推出(2b)．

留下来只需说明f_η是a.p.函数．假设$\{\tau_j\}$是这样的一个实数序列，当$j\to\infty$时$f(t+\tau_j)-f(t)\to0$对于$t\in R$一致地成立．从(1)，

$$|f_\eta(t+\tau_j)-f_\eta(t)|=\left|\int_{-\infty}^0 e^{\eta s}\{[f(t+\tau_j+s)-f(t+s)]ds\right|$$

$$\leqslant[\sup_{u\in R}|f(u+\tau_j)-f(u)|]\eta^{-1},$$

因此，当$j\to\infty$时$f_\eta(t+\eta)-f_\eta(t)\to0$对于$t\in R$一致地成立．从定理8推知$f_\eta$是a.p.函数，并且$m[f_\eta]\subset m[f]$．关系式(3)意味着$df_\eta/dt$是a.p.函数，而且显然有$m[df_\eta/dt]=m[f_\eta]$．因此，关系式(3)与$m[f_\eta]\subset m[f]$意味着$m[f_\eta]=m[f]$．引理证毕．

请注意，引理4断言方程$\dot{y}=f(t)$可以用a.p.函数近似求解到任意希望的精确度，当然，如果$\int^t f$无界，当精确性改进时，近似函数将变得规模较大．估计式(2a)表明近似函数不可能增长得太快．

在微分方程中，函数经常还依赖于t以外的参数，因此有必要把殆周期

性的概念引伸到这种情形.

定义 7. 设 $f\in C^n$, $t\in R$, $x\in C^k$. 连续函数 $f(t,x)$ 叫作相对于紧集 Λ 内的 x 一致的 t 的殆周期函数, 如果 $f(t,x)$ 对于 $t\in R, x\in C^k$ 是连续的, 又对于任意 $\eta>0$, 可能找到 $l(\eta)>0$, 使得在任何长度为 $l(\eta)$ 的区间里, 存在 τ 使得不等式

$$|f(t+\tau,x)-f(t,x)|<\eta$$

对于 $t\in R, x\in\Lambda$ 满足.

前面关于 a. p. 函数的各个结论对于相对于 $x\in\Lambda$ 一致的 t 的 a. p. 函数 $f(t,x)$ 依旧正确. 在应用到微分方程时, 需要把引理 4 改进到这种比较一般的情形. 说得具体一点, 需要求方程

$$\frac{\partial y}{\partial t}-f(t,x)=0$$

的对 x 非常光滑的近似解, 可以用引理 4 与多少有点古典的光滑算子来达到这个结果. 如果 $M[f(\cdot,x)]$ 记 $f(t,x)$ 相对于 t 的平均值, 则我们有

引理 5. 假设 $f: R\times C^k\to C^n$ 是相对于紧集 的 x 一致的 t 的 a. p. 函数, 这个紧集比方说是闭球 $B_\sigma=\{x\in C^k: |x|\leqslant\sigma\}$. 如果对于 $x\in B_\sigma$ 有 $M[f(\cdot,x)]=0$, 则对于任意 $\sigma_1<\sigma$, 存在一个 $\eta_0>0$ 与一个这样的函数 $w(t,x,\eta)$, 它对于 $t\in R, x\in B_{\sigma_1}, 0<\eta<\eta_0$ 定义而且连续, 它是相对于 B_{σ_1} 内的 x 与 $(0,\eta_0)$ 的任意紧集的 η 而言一致的 t 的殆周期函数, $m[w(\cdot,x,\eta)]=m[f(\cdot,x)]$, $w(t,x,\eta)$ 有相对于 x 的任何需要阶的导数, 并且如果

$$g(t,x,\eta)=\frac{\partial w(t,x,\eta)}{\partial t}-f(t,x),$$

则当 $\eta\to0$ 时, 对于 $t\in R, x\in B_{\sigma_1}$ 一致地有 $g(t,x,\eta)$, $\eta w(t,x,\eta)$ 与 $\eta\partial w(t,x,\eta)/\partial x$ 趋于零. 此外, 如果 $f(t,x)$ 有对于 x 的连续的一阶偏导数, 则当 $\eta\to0$ 时, 对于 $t\in R, x\in B_{\sigma_1}$ 一致地有 $\partial g(t,x,\eta)/\partial x\to0$.

证明 从引理 4 推知存在由(1)定义的函数 $f_\eta(t,x)$, 它是相对于 B_σ 中的 x 与任意紧集中的 η 而言一致的 t 的 a. p. 函数, 并使得

$$\begin{aligned}&|f_\eta(t,x)|\leqslant\eta^{-1}\zeta(\eta),\\&\frac{\partial f_\eta(t,x)}{\partial t}-f(t,x)=-\eta f_\eta(t,x),\end{aligned}\tag{4}$$

这里当 $\eta\to0$ 时 $\zeta(\eta)\to0$.

对于一个固定的 $a>0$ 与某个固定的整数 $q\geqslant1$, 考虑由

$$\Delta_a(x)=\begin{cases}d_a(1-a^{-2}|x|^2)^{2q}, & \text{当 } |x|\leqslant a,\\ 0, & \text{当 } |x|>a\end{cases}$$

定义的函数 $\Delta_a(x)$，这里的常数 d_a 被确定得使 $\int_{B_a}\Delta_a(x)dx=1$. 由

$$w(t,x,\eta)=\int_{B_\sigma}\Delta_a(x-y)f_\eta(t,y)dy \tag{5}$$

定义 $w(t,x,\eta)$. 由于 $f_\eta(t,x)$ 是相对于 B_σ 中的 x 与任意紧集中的 η 而言一致的 t 的 a.p. 函数，容易看出 $w(t,x,\eta)$ 也有相同的性质.

函数 $\Delta_a(x-y)$ 对于 x 具有直到 $2q-1$ 阶的连续偏导数，它们的范数以 $G(a)$/(求积区域的面积)为界，这里 $G(a)$ 是 $0<a<\infty$ 上的连续函数. 当 $a\to 0$ 时函数 $G(a)$ 可能趋于 ∞. 因此，根据(4)，由(5)定义的函数 $w(t,x,\eta)$ 对 x 有直到 $2q-1$ 阶的偏导数，它们有界 $G(a)\zeta(\eta)\eta^{-1}$. 由于 q 是任意整数，故对于 x 的导数的阶数可以如所希望的那样大.

按下述方式取 η 的函数 $a=a_\eta$，当 $\eta\to 0$ 时 $a_\eta\to 0$ 且 $G(a_\eta)\zeta(\eta)\to 0$. 由于 ηw、$\eta\partial w/\partial x$ 有界 $G(a_\eta)\zeta(\eta)$，因此引理关于 $\eta w(t,x,\eta)$ 的结论正确.

对于任意 $\sigma_1<\sigma$，选取 η_0 甚小，以致 $0<\eta<\eta_0$ 时 $\sigma_1+a_\eta<\sigma$. 从 $\Delta_a(x)$ 的定义推知对于 B_{σ_1} 中每个 x 及 $0<\eta<\eta_0$，有 $\int_{B_\sigma}\Delta_{a_\eta}(x-y)dy=1$. 因此，从关系式(4)与(5)推出

$$\bar{g}(t,x,\eta)=\int_{B_\sigma}\Delta_{a_\eta}(x-y)[f(t,y)-f(t,x)]dy, \tag{6}$$

这里 $\bar{g}=g+\eta w$. 从 $\Delta_a(x)$ 的定义推出

$$|\bar{g}(t,x,\eta)|\leqslant \sup_{0\leqslant|x-y|\leqslant a_\eta}|f(t,y)-f(t,x)|.$$

由于 $\eta\to 0$ 时 $a_\eta\to 0$，而 $f(t,x)$ 当 $t\in R, x\in B_{\sigma_1}$ 时一致连续，故存在 $0<\eta<\eta_0$ 上的连续函数 $\delta(\eta)$，当 $\eta\to 0$ 时 $\delta(\eta)\to 0$，使得

$$\sup_{0\leqslant|x-y|\leqslant a_\eta}|f(t,y)-f(t,x)|<\delta(\eta).$$

因此，$|\bar{g}(t,x,\eta)|<\delta(\eta)$，并且 $|g(t,x,\eta)|<\delta(\eta)+G(a_\eta)\zeta(\eta)$，又 g 满足引理第一部分陈述的性质.

此外，如果 $f(t,x)$ 对 x 有连续的一阶偏导数，则在关系式(6)中用分部积分得到

$$\frac{\partial\bar{g}(t,x,\eta)}{\partial x}=\int_{B_\sigma}\Delta_{a_\eta}(x-y)\left[\frac{\partial f(t,y)}{\partial x}-\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right]dy.$$

用与前面相同类型的论证，可证明这个表达式有界 $\delta_1(\eta)$，这个函数当 $\eta\to 0$

时趋于零．引理证毕．

如果在引理 5 中，函数 $f(t,x)$ 对 x 的某些分量是周期的，则函数 $w(t,x,\eta)$ 也可以选得对于这些分量具有相同的周期．

如果 g 是 n 维向量，ϕ 是 r 维向量，则 $g(\phi)$ 叫作 ϕ 的具有向量周期 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_r)(\omega_j>0, j=1,2,\cdots,r)$ 的多重周期函数，如果函数 g 对于 ϕ 的第 j 个分量的周期是 ω_j．如果 $g(\phi)$ 是多重周期函数，则 $g(\phi_1+t,\cdots,\phi_r+t)$ 是相对于 ϕ 一致的 t 的 a. p. 函数．因此定义这个函数对于 t 的平均值是有意义的．平均值的概念首先由 S. Diliberto[1] 用到微分方程．为简化记号，令 $\phi+t=(\phi_1+t,\cdots,\phi_r+t)$，又记上述平均值为

$$M_\phi[g(\phi)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g(\phi+t)dt. \tag{7}$$

为了稍好地理解这个概念，考虑 ϕ 是二维向量 $\phi=(\phi_1,\phi_2)$ 而

$$g(\phi)\sim\sum_{j,k}a_{jk}e^{i(k\mu\phi_1+j\omega\phi_2)}$$

的情况．在通常关于多重周期函数的论文中，g 的平均值是 g 的 Fourier 级数的常数项，即是 a_{00}．按照定义(7)，

$$M_\phi[g(\phi)]=\sum_{j,k:k\mu+j\omega=0}a_{jk}e^{i(k\mu\phi_1+j\omega\phi_2)}.$$

如果频率 μ,ω 使得 μ/ω 是有理数，则它可能是 ϕ 的函数．

引理 5 对于下述情形有相应的推广，即函数 $g(t,\phi,x)$ 是向量 ϕ 的多重周期函数，又是相对于 $\phi\in C^r$ 与 $x\in B_\sigma$ 一致的 t 的 a. p. 函数，而且 $M_{t,\phi}[g(t,\phi,x)]=0$．在这些条件下，对于任意 $\sigma_1<\sigma$，存在一个 $\eta_0>0$ 与一个 $0<\eta<\eta_0$ 上的函数 $W(t,\phi,x,\eta)$，它是 ϕ 的多重周期函数，又是 t 的 a. p. 函数，使得函数

$$G(t,\phi,x,\eta)=\frac{\partial W}{\partial t}+\sum_{j=0}^{r}\frac{\partial W}{\partial\phi_j}-g(t,\phi,x)$$

以及 ηW, $\eta\partial W/\partial\phi$, $\eta\partial W/\partial x$ 当 $\eta\to0$ 时相对于 $t\in R$, $\phi\in C^r$, $x\in B_{\sigma_1}$ 一致地趋于零．如果 $g(t,\phi,x)$ 对 x 有连续的一阶偏导数，则 $G(t,\phi,x,\eta)$ 对于 ϕ,x 的偏导数当 $\eta\to0$ 相对于 t,ϕ,x 也一致地趋于零．这个事实的证明与引理 5 的证明很相似，可以在 Hale[3] 中找到．

参考文献

André, J., and P. Seibert [1]. On after-endpoint motions of general discontinuous control systems and their stability properties. *Proc. 1st Intern, IFAC Congr*. Moscow 1960, **1**, 919—922.

Andronov, A. A., S. E. Khaikin, and A. A. Witt [1]. *Theory of Oscillators*. Pergamon Press, New York, 1966.

Antosiewicz, H. [1]. Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations. *Pac. J. Math*. **17** (1966), 191—197. [2]. Un analogue du principe du pointe fixe de Banach. *Ann. Mat. Pura. Appl*. (4) **74** (1966), 61—64. [3]. On an integral inequality. To appear.

Arnold, V. I. [1]. Small denominators. I. Mapping the circle onto itself. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat*. **25** (1961), 21—86. [2]. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Uspehi Mat. Nauk* 18 (1963), no. 6 (114), 91—192.

Arscott, F. M. [1]. *Periodic Differential Equations*. Pergamon Press, New York, 1964.

Auslander, J. and W. H. Gottschalk [1]. *Topological Dynamics*. W. A. Benjamin, New York, 1968.

Bailey, H. R. and L. Cesari [1]. Boundedness of solutions of linear differential equations with periodic coefficients. *Arch. Rat. Mech. Ana*. **1** (1958), 246—271.

Bancroft, S., J. K. Hale and D. Sweet [1]. Alternative problems for nonlinear functional equations. *J. Differential Equations* **4** (1968), 40—56.

Bartle, R. G. [1]. Singular points of functional equations. *Trans. Am. Math. Soc*. **75** (1953), 366—384.

Bass, R. W. [1]. Equivalent linearization, nonlinear circuit analysis and the stabilization and optimization of control systems. *Proc. Symp. Nonlinear Circuit Anal.* 6 (1956). [2]. Mathematical legitimacy of equivalent linearization by describing functions. *IFAC Congress*, 1959.

Bellman, R. [1]. *Stability Theory of Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1953. [2]. *Introduction to Matrix Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1960.

Bendixson, I. [1]. Sur les courbes définies par des équations differéntiélles. *Acta Math.* 24 (1901), 1—88.

Birkhoff, G. D. [1]. Dynamical Systems. *Am. Math. Soc. Colloq. Publ.* New York, 1927.

Bogoliubov, N. N. [1]. On some statistical methods in mathematical physics. *Akad. Nauk. Ukr. R. S. R.* 1945.

Bogoliubov, N. N. and Y. A. Mitropolskii [1]. *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations.* Gordon and Breach, New York, 1961. [2]. The method of integral manifolds in nonlinear mechanics. *Contributions to Differential Equations* 2 (1963), 123—196.

Bogoliubov, N. N., Jr., and B. I. Sadovnikov [1]. On periodic solutions of differential equations of nth order with a small parameter. *Symp. Nonlinear Vibrations*, Kiev, USSR, Sept., 1961.

Borg, G. [1]. On a Liapunov criteria of stability. *Am. J. Math.* 71 (1949), 67—70.

Borges, C. [1]. Periodic solutions of nonlinear differential equations: existence and error bounds. Ph. D. dissertation. University of Michigan. 1963.

Cartwright, M., [1]. Forced oscillations in nonlinear systems. Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, 1 (1950), 149—241, *Annals Math. Studies*, No. 20, Princeton.

Cesari, L. [1]. *Asymptotic Behavior and Stability Problems*. Spring-

er, 1959, Second edition, Academic Press, New York, 1963. [2]. Proprietà asintotiche delle equazioni differenziali lineari ordinarie. *Rend. Sem. Mat. Roma* **3** (1939), 171—193. [3]. Sulla stabilità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici. *Atti Accad. Mem. Classe Fis. Mat. e Nat.* (60) **11** (1940), 633—692. [4]. Existence theorems for periodic solutions of nonlinear differential systems. *Boletin Soc. Mat. Mexicana* 1960, 24—41. [5]. Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations. *Contr. Diff. Equations* **1** (1963), 149—167. [6]. Functional analysis and Galerkin's method. *Michigan Math. J.*, **11** (1964), 385—414. [7]. Existence in the large of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **20** (1965), 170—190. [8]. A nonlinear problem in potential theory. *Michigan Math. J.*, 1969.

Cesari, L. and J. K. Hale [1]. A new sufficient condition for periodic solutions of weakly differential systems. *Proc. Am. Math. Soc.* **8** (1957), 757—764.

Cetaev, N. G. [1]. Un théorème sur l'instabilité. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **2** (1934), 529—534.

Chafee, N. [1]. The bifurcation of one or more closed orbits from an equilibrium point of an autonomous differential system. *J. Differential Equations*, **4** (1968), 661—679.

Chen, K. T. [1]. Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point. *Amer. J. Math.* **85** (1963), 693—722.

Coddington, E. A. and N. Levinson [1]. *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill, New York, 1955.

Coppel, W. A. [1] *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations. Heath Mathematical Monographs*, 1965.

Coppel, W. A. and A. Howe [1]. On the stability of linear canonical systems with periodic coefficients. *J. Austral. Math. Soc.*

5 (1965), 169—195. [2]. Corrigendum: On the stability of linear canonical systems with periodic coefficients. *J. Austral. Math. Soc.* 6 (1966), 256.

Cronin, J. [1]. Branch points of solutions of equations in a Banach space. *Trans. Am. Math. Soc.* 69 (1950), 208—231.

Cruz, M. A. and J. K. Hale [1]. Stability of functional differential equations of neutral type. *J. Differential Equations*. 1969.

Denjoy, A. [1]. Sur les courbes définies par les équations différentielles a la surface du tore. *J. de Math.* 11 (1932), 333—375.

Diliberto, S. P. [1]. Perturbation theorems for periodic surfaces. I, II. *Rend. Circ. Mat. Palermo* 9 (2) 1960, 265—299; 10 (2) (1961), 111. [2]. On stability of linear mechanical systems. *Proc. Internat. Sympos. Nonlinear Vibrations. Izdat. Akad. Nauk Ukrain SSR*, Kiev. 1, 1963, pp. 189—203. [3]. New results on periodic surfaces and the averaging principle. *U. S.—Japanese Seminar on Differential and Functional Equations*, pp. 49—87. W. A. Benjamin, 1967.

Fillipov, A. F. [1]. Differential equations with discontinuous right hand side. *Mat. Sbornik (N. S.)* 51 (1960), 99—128.

Flugge-Lotz, I. [1]. *Discontinuous automatic control*. Princeton, 1953.

Friedrichs, K. [1]. *Special Topics in Analysis*. Lecture Notes, New York University, 1953—1954. [2]. *Advanced Ordinary Differential Equations*. Lecture Notes, New York University, 1956.

Gambill, R. A. and J. K. Hale [1]. Subharmonic and ultraharmonic solutions of weakly nonlinear systems. *J. Rat. Mech. Ana.* 5 (1956), 353—398.

Golomb, M. [1]. Expansion and boundedness theorems for solutions of linear differential equations with periodic or almost periodic coefficients. *Arch. Rat. Mech. Ana.* 2 (1958), 284—308.

Gottschalk, W. H. and G. A. Hedlund [1]. *Topological dynamics. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.* 36 (1955).

Graves, L. M. [1]. Remarks on singular points of functional equations. *Trans. Am. Math. Soc.* **79** (1955), 150—157.

Hahn, W. [1]. *Theory and Application of Lyapunov's Direct Method.* Prentice-Hall, New York, 1963. [2]. *Stability of Motion*, Springer-Verlag, New York, 1967.

Halanay, A. [1]. *Differential Equations—Stability, Oscillation, Time-Lags.* Academic Press, New York, 1966.

Hale, J. K. [1]. Periodic solutions of nonlinear systems of differential equations. *Riv. Mat. Univ. Parma* **5** (1954), 281—311. [2]. Sufficient conditions for the existence of periodic solutions of first and second order differential equations. *J. Math. Mech.* **7** (1958), 163—172. [3]. Integral manifolds of perturbed differential systems. *Ann. Math.* **73** (1961). 496—531. [4]. On differential equations containing a small parameter. *Contr. Diff. Equations.* **1** (1962). [5]. Asymptotic behavior of the solutions of differential difference equations. *Proc. Intern. Symp. Nonlinear Oscillations, Kiev.* Sept. 1961, **I** (1963), 409—426. [6]. On the behavior of solutions of linear differential equations near resonance points. *Contr. Theory Nonlinear Oscillations* **5** (1960). [7]. *Oscillations in Nonlinear Systems.* McGraw-Hill, New York, 1963. [8]. Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional differential equations. *J. Diff. Equations* **1** (1965), 452—482. [9]. Periodic solutions of a class of hyperbolic equations containing a small parameter. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **23** (1967), 380—398.

Hale, J. K. and A. Stokes [1]. Behavior of solutions near integral manifolds. *Arch. Rat. Mech. Ana.* **6** (1960), 133—170.

Hall, W. S. [1]. Periodic solutions of a class of weakly nonlinear evolution equations. Ph. D. Thesis. Brown University, June, 1968.

Harris, W. A., Jr., Y. Sibuya, and L. Weinberg [1]. Holomorphic solutions of linear differential systems at singular points. To

appear.

Hartman, P. [1]. *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1964. [2]. On stability in the large for systems of ordinary differential equations. *Canad. J. Math.* **13** (1961), 480—492.

Howe, A. [1]. Linear canonical systems with periodic coefficients. Ph. D. Dissertation, University of Canberra, Australia, 1967.

Infante, E. F. and M. Slemrod [1]. An invariance principle for dynamical systems on Banach spaces. *Proc. IUTAM Symp. on Stability*, Springer, 1970.

Kelley, A. [1]. The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds. *J. Differential Equations*, 3 (1967), 546—570.

Knobloch, H. W. [1]. Remarks on a paper of Cesari on functional analysis and nonlinear differential equations. *Michigan Math. J.* **10** (1963), 417—430. [2]. Comparison theorems for nonlinear second order differential equations. *J. Diff. Equations* **1** (1965), 1—25.

Kolmogorov, A. N. [1]. Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique. *Proc. Int. Cong. Math.* 1954, **1**, 315—333. Noordhoff, 1957.

Krasovskii, N. N. [1]. *Stability of Motion*. Stanford University Press, 1963.

Krein, M. G. [1]. The basic propositions in the theory of λ-zones of stability of a canonical system of linear differential equations with periodic coefficients (Russian), Pamyati A. A. Andronova. *Izdat. Akad. Nauk SSSR*, Moscow, 1955, pp. 413—498.

Krylov, N. and N. N. Bogoliubov [1]. The application of methods of nonlinear mechanics to the theory of stationary oscillations. *Publication 8 of the Ukrainian Academy of Science*, Kiev, 1934. [2]. Introduction to nonlinear mechanics, *Annals Math. Studies*,

No. 11. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1947.

Kruzweil, J. [1]. Invariant manifolds for flows. *Proc. Sym. Diff. Equations and Dynamical Systems.* Academic Press, New York, 1967. [2]. The averaging principle in certain special cases of boundary problems for partial differential equations. *Casopis Pest. Mat.* **88** (1963), 444—456. [3]. van der Pol perturbation of the equation for a vibrating string. *Czechoslovak Math. J.* **17** (92) (1967), 568—608.

Kyner, W. T. [1]. Invariant manifolds. *Rend. Circ. Mat. Palermo.* **10** (2) (1961), 98—110.

Lakshmikantham, V. and S. Leela [1]. *Differential Inequalities.* Academic Press, New York, 1969.

LaSalle, J. P. [1]. Relaxation oscillations. *Quart. Appl. Math.* **7** (1949), 1—19. [2]. An invariance principle in the theory of stability. *Int. Symp. on Diff. Eqs. and Dyn. Sys.*, p. 277, Academic Press, New York, 1967.

LaSalle, J. P. and S. Lefschetz [1]. *Stability by Liapunov's Direct Method.* Academic Press, New York, 1961.

Lee, B. and L. Markus [1]. *Optimal Control Theory.* Wiley, New York, 1967.

Lefschetz, S. [1]. *Differential Equations: Geometric Theory.* Second Edition. Interscience, New York, 1959. [2]. *Stability of Nonlinear Control Systems.* Academic Press, New York, 1965.

Levinson, N. [1]. Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order. *Ann. Math.* **45** (1944), 723—737. [2]. Small periodic perturbations of an autonomous system with a stable orbit. *Ann. Math.* **52** (1950), 727—738.

Lewis, D. C. [1]. On the role of first integrals in the perturbation of periodic solutions. *Ann. Math.* **63** (1956), 535—548. [2]. Autosynartetic solutions of differential equations. *Am. J. Math.* **83** (1961), 1—32.

Liapunoff, A. [1]. *Problème Géneral de la Stabilité du Mouvement.*

Annals Math. Studies, No.17. Princeton University Press, 1949.

Lillo, J. C. [1]. A note on the continuity of characteristic exponents. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **46** (1960), 247—250.

Locker, J. S. [1]. An existence analysis for nonlinear equations in a Hilbert space. *Trans. Am. Math. Soc.* **128** (1967), 403—413.

Lykova, O. B. [1]. Investigation of the solution of a system of differential equations with a small parameter on a two-dimension local integral manifold in the resonance case. *Ukrain. Mat. Z.* **10** (1958), 365—374.

Loud, W. [1]. Periodic solutions of $x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t)$. *Mem. Am. Math. Soc.*, No. 31, 1959, 58pp.

Magnus, W. and S. Winkler [1]. *Hill's Equation.* Interscience, New York, 1966.

Malkin, J. G. [1]. Theory of Stability of Motion, AEC-tr-3352.
[2]. *Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations.* Moscow, 1956.

Markus, L. [1]. Asymptotically autonomous differential systems. *Contr. Theory Nonlinear Oscillations*, **3** (1956), 17—29.

Markus, L. and H. Yamabe [1]. Global stability criteria for differential systems. *Osaka Math. J.* **12** (1960), 305—317.

Massera, J. L. [1]. Contributions to stability theory. *Ann. Math.* **64** (1956), 182—206.

Massera, J. L. and J. J. Schäffer [1]. *Linear Differential Equations and Function Spaces.* Academic Press, New York, 1966.

McCarthy, J. [1]. The stability of invariant manifolds, I. Stanford University, Appl. Math. Stat. Lab., *ONR Tech. Rep.* **36**. 1956.

McGarvey, D. [1]. Linear differential systems with periodic coefficients involving a large parameter. *J. Differential Equations.* **2** (1966), 115—142.

McLachlan, N.W. [1]. *Theory and Application of Mathieu Functions.* The Clarendon Press, Oxford, 1947.

Minorsky, N. [1]. *Nonlinear Oscillations.* van Nostrand, Princeton,

N. J., 1962.

Mishchenko, Z. and L. S. Pontrjagin [1]. Differential equations with a small parameter attached to the higher derivatives and some problems in the theory of oscillation. *IRE Trans.* CT-7 (1960), 527—535.

Mitropolski, Y. A. [1]. *Problèmes de la théorie asymptotique des oscillations non stationaires.* Gauthier-Villars, Paris, 1966.

Morrison, J. A. [1]. An averaging scheme for some nonlinear resonance problems. *SIAM J. Appl. Math.* 16 (1968), 1024—1047.

Moser, J. [1]. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.* I 1962, 1—20. [2]. Bistable Systems of differential equations with applications to tunnel diode circuits. *IBM J. Res. Develop.* 5 (1961), 226—240.

Nemitskii, V.V. and V. V. Stepanov [1]. *Qualitative Theory of Differential Equations.* Princeton University Press, 1960.

Nirenberg, L. [1]. *Functional Analysis.* Lecture Notes, New York University, 1960—1961.

Olech, C. [1]. On global stability of an autonomous system on the plane. *Contributions to Differential Equations* 1 (1963), 389—400.

Opial, Z. [1]. Sur la dépendance des solutions d'un système d'équations différentielles de leurs seconds membres. Applications aux systèmes presques autonomes. *Ann. Polon. Math.* 8 (1960), 75—89.

Peixoto, M. [1]. Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology* 1 (1962), 101—120.

Perelló, C. [1]. Periodic solutions of differential equations with time lag containing a small parameter. *J. Diff. Equations.* *1968* [2]. A note on periodic solutions of nonlinear differential equations with time lags, *Differential Equations and Dy-*

namical Systems. Academic Press. 1967, 185—188.

Perron, O. [1]. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungssysteme. *Math. Zeit.* **32** (1930), 703—728.

Pliss, V. A. [1]. On the theory of invariant surfaces. *Differentsialniye Uravnaniya* **2** (1966), 1139—1150. [2]. *Nonlocal Problems of the Theory of Oscillations*. Academic Press, New York, 1966.

Poincaré, H. [1]. Sur les courbes définies par les équations différentielles. *J. de Math.*, (3) **7** (1881), 375—422; (3) **8** (1882), 251—296; (4) **1** (1885), 167—244; (4) 2 (1886), 151—217. [2]. *Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste*. Paris, 3 vols., 1892, 1893, 1899.

Rabinowitz, P. H. [1]. Periodic solutions of a nonlinear wave equation. *Comm, Pure Appl. Math.* **20** (1967), 145—205.

Reuter, G. E. H. [1]. Subharmonics in a nonlinear system with unsymmetric restoring forces. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **2** (1949), 198—207.

Sacker, R. J. [1]. A new approach to the perturbation theory of invariant surfaces. *Comm. Pure Math.* **18** (1965), 717—732.

Sansone, G. and R. Conti [1]. *Nonlinear Differential Equations*. Pergamon Press, New York, 1964.

Schwartz, A. J. [1]. A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds. *Am. J. Math.* **85** (1963), 453—458; errata, ibid, **85** (1963), 753.

Sethna, P. R. [1]. An extension of the method of averaging. *Quart. Appl. Math.* **25** (1967), 205—211.

Smale, S. [1]. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 747—817.

Sternberg, S. [1]. Local contractions and a theorem of Poincaré. *Am. J. Math.* **79** (1957), 809—824. [2]. On the structure of local homeomorphisms of euclidean *n*-space, I. *Am. J. Math.* **80** (1958), 623—632. [3]. II, Ibid, **81** (1959), 578—604.

Szarski, J. [1]. *Differential Inequalities*. Warszawa, 1965.

Urabe, M. [1]. *Nonlinear Autonomous Oscillations.* Academic Press, New York, 1967. [2]. Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems and its extension to multipoint boundary value problems for general nonlinear systems. *Numerical Solutions of Nonlinear Differential Equations* (*Proc. Adv. Sympos.* Madison, Wis., 1966), pp. 297—327. Wiley, New York, 1966.

Vainberg, M. M. and V. A. Tregonin [1]. The methods of Lyapunov and Schmidt in the theory of nonlinear differential equations and their further development. *Mathematical Surveys*, **17** (1962), 1—60.

van der Pol, B. [1]. Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance. *Phil. Mag.* **3** (1927), 65—80; *Proc. Inst. Radio Eng.* **22** (1934), 1051—1086.

Wasow, W. [1]. *Asymptotic Expansions of Ordinary Differential Equations.* Interscience, New York, 1965.

Williams, S. [1]. A connection between the Cesari and Leray-Schauder methods. *Michigan Math. J.*, 1969.

Yakubovich, V. A. [1]. Structure of the group of symplectic matrices and the unstable canonical systems with periodic coefficients. *Mat. Sbornik N. S.* **44** (86) (1958), 313—352. [2]. Critical frequencies of quasi-canonical systems. *Vestnik Leningrad Univ.* **13** (1958), 35—63.

Yoshizawa, T. [1]. Asymptotic behavior of solutions of a system of differential equations. *Contributions to Differential Equations* 1 (1963), 371—387. [2]. *Stability Theory of Liapunov's Second Method.* Mathematical Society of Japan, 1966.

Yoshizawa, T. and J. Kato [1]. Asymptotic Behavior of Solutions near Integral Manifolds. *Differential Equations and Dynamical Systems*, J. K. Hale and J. P. LaSalle, Eds., Academic Press, New York, 1967, pp. 267—275.

Zubov, V. I. [1]. *Methods of A. M. Lyapunov and their Applications.* Noordhoff, 1964.

索　引